

Exercice 1: Soit p un nombre premier.

- Supposons que $11p+1$ soit le carré d'un entier. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $11p+1 = n^2$. Donc $11p = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$.
Or 11 et p sont premiers donc, comme $n-1 < n+1$,
$$(n-1, n+1) \in \{(1, 11p), (11, p), (p, 11)\}$$
 - Si $(n-1, n+1) = (1, 11p)$ alors $n=2$ donc $11p=1$ ce qui est absurde.
 - Si $(n-1, n+1) = (11, p)$ alors $n=12$ et $p=13$.
 - Si $(n-1, n+1) = (p, 11)$ alors $n=10$ et $p=9$ ce qui est absurde.
- Posons $p=13$, $11p+1 = 146 = 12^2$ et p est premier.
- Donc le seul nombre premier tel que $11p+1$ soit le carré d'un entier est.

$$p = 13$$

Exercice 2:

1) f est définie sur $[-1, 1]$ donc la formule est définie sur $[-1, 1]$.

• Posons $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$$

• f est dérivable sur $] -1, 1[$.

• Soit $x \in] -1, 1[$, $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

Donc f est constante sur $] -1, 1[$.

• Comme f est continue sur $[-1, 1]$, alors f est constante sur $[-1, 1]$.

• $f(0) = \arccos(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ donc $f = \pi$.

Ainsi :

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$$

2) a) Soit $k \in (\mathbb{N}, \mathbb{N})$, on a : $0 \leq \frac{2k}{n+1} \leq \frac{2n}{n+1} \leq 2$

Donc $-1 \leq 1 - \frac{2k}{n+1} \leq 1$

Or $\arccos$ est définie sur $[-1, 1]$ donc :

$$S_n \text{ est bien définie}$$

b) So $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{D}$.

(2)

$$\begin{aligned} \arccos\left(1 - \frac{2k}{n+1}\right) &= \arccos\left(\frac{n+1-2k}{n+1}\right) \\ &= \pi - \arccos\left(-\frac{n+1-2k}{n+1}\right) \quad \text{d'après 1.} \\ &= \pi - \arccos\left(-1 + \frac{2k}{n+1}\right) \\ &= \pi - \arccos\left(1 - 2 + \frac{2k}{n+1}\right) \\ &= \pi - \arccos\left(1 - \frac{2(n+1)-2k}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\arccos\left(1 - \frac{2k}{n+1}\right) = \pi - \arccos\left(1 - \frac{2(n+1-k)}{n+1}\right)}$

$$\begin{aligned} c) S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\pi - \arccos\left(1 - \frac{2(n+1-k)}{n+1}\right) \right) \\ &= \pi \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n \arccos\left(1 - \frac{2(n+1-k)}{n+1}\right) \\ &= \pi n - \sum_{j=n+1-k}^n \arccos\left(1 - \frac{2j}{n+1}\right) \\ &= \pi n - S_n \end{aligned}$$

Donc $2S_n = \pi n$, ainsi :

$$\boxed{S_n = \frac{\pi n}{2}}$$

Exercice 3:

$$\begin{aligned} 1-a) \quad & \frac{\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)}{4 \sin x} + \frac{1}{2} = \frac{\sin((2n+2)x+x) - \sin((2n+2)x-x)}{4 \sin x} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sin((2n+2)x) \cos(x) + \cos((2n+2)x) \sin(x) - \sin((2n+2)x) \cos(x) + \cos((2n+2)x) \sin(x)}{4 \sin x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2 \sin(x) \cos((2n+2)x)}{4 \sin(x)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\cos((2n+2)x) + 1) \\ &= \frac{1}{2} (2 \cos^2((n+1)x) - 1 + 1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)}{4 \sin x} + \frac{1}{2} = \cos^2((n+1)x)}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, ③

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos^2(kx) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \cos^2((j+1)x)$$

$$= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\sin((2j+3)x) - \sin((2j+1)x)}{4 \sin x} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{4 \sin x} \sum_{j=0}^{n-1} (\sin((2(j+1)+1)x) - \sin((2j+1)x)) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} 1$$

$$= 1 + \frac{1}{4 \sin x} (\sin((2n+1)x) - \sin(x)) + \frac{1}{2} n \quad \text{par somme télescopique.}$$

$$= \frac{\sin((2n+1)x)}{4 \sin x} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} n$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{4 \sin x} + \frac{3+2n}{4}}$$

2) D'après la question précédente appliquée à $x = \frac{\pi}{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sin(\pi)}{4 \sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)} + \frac{3+2n}{4}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{3+2n}{4}}$$

Problème 1:

1-a) $\arccos$ et $\arcsin$ sont définies sur $[-1, 1]$

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \in [-1, 1], \cos(2x) \in [-1, 1]$

Donc

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathcal{D} = \mathbb{R}.}$$

b) • $f(0) = \arccos(1) + \arcsin(1) = 0 + \frac{\pi}{2}$

donc

$$f(0) = \frac{\pi}{2}$$

• $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arccos(0) + \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$

donc

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

• $f(\pi) = \arccos(-1) + \arcsin(1) = \pi + \frac{\pi}{2}$

donc

$$f(\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+2\pi) = \arccos(\cos(x+2\pi)) + \arcsin(\cos(2x+4\pi))$$

$$= \arccos(\cos(x)) + \arcsin(\cos(2x)) = f(x)$$

Donc

$$\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \operatorname{Arccos}(\cos(-x)) + \operatorname{Arccos}(\cos(-2x)) = \operatorname{Arccos}(\cos(x)) + \operatorname{Arccos}(\cos(2x)) \\ = f(x)$$

Donc f est paire.

e) f est 2π -périodique. On peut l'étudier sur $[-\pi, \pi]$ et effectuer des translations de vecteurs $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

f est paire. On peut l'étudier sur $[0, \pi]$ et effectuer la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

2-a) Arccos et Arccos sont définies sur $[-1, 1]$.

Soit $y \in [-1, 1]$, on a $0 \leq y^2 \leq 1$ donc $-1 \leq 2y^2 - 1 \leq 1$.

Donc l'équation est définie sur $[-1, 1]$.

• Analyse: Supposons qu'il existe $y \in [-1, 1]$ tel que :

$$\operatorname{Arccos}(y) + \operatorname{Arccos}(2y^2 - 1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ainsi } \operatorname{Arccos}(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}(2y^2 - 1)$$

$$\text{Donc } \cos(\operatorname{Arccos}(y)) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}(2y^2 - 1)\right) \quad (E')$$

$$\text{Or: } (E') \Leftrightarrow y = \sin(\operatorname{Arccos}(2y^2 - 1))$$

$$\Leftrightarrow y = 2y^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } y = 1 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}$$

• Synthèse:

$$\text{• Soit } y = 1, \quad \operatorname{Arccos}(y) + \operatorname{Arccos}(2y^2 - 1) = \operatorname{Arccos}(1) + \operatorname{Arccos}(1) \\ = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{• Soit } y = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Arccos}(y) + \operatorname{Arccos}(2y^2 - 1) = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

• Conclusion: Les solutions sont :

$$\boxed{y = 1 \text{ et } y = -\frac{1}{2}}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, pour $y = \cos x$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Arccos}(\cos x) + \operatorname{Arccos}(\cos(2x)) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arccos}(y) + \operatorname{Arccos}(2y^2 - 1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ ou } \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$$

3-a) : Arccos et Arccos sont dérivables sur $] -1, 1[$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \cos x \in] -1, 1[\\ \cos(2x) \in] -1, 1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ 2x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \Leftrightarrow 2x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\Leftrightarrow x \notin \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Donc :

$$\boxed{\mathcal{D}' = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}}$$

b) Soit $x \in \mathcal{D}' \cap I =]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}} + \frac{-2\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos^2(2x)}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} - \frac{2\sin(2x)}{\sqrt{\sin^2(2x)}} \\ &= \frac{\sin x}{|\sin x|} - \frac{2\sin(2x)}{|\sin(2x)|} = 1 - \frac{2\sin(2x)}{|\sin(2x)|} \quad \text{car } \sin x > 0 \end{aligned}$$

• si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors $2x \in]0, \pi[$ donc $\sin 2x > 0$,

$$\text{ainsi } f'(x) = 1 - 2 = -1$$

• si $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, alors $2x \in]\pi, 2\pi[$ donc $\sin 2x < 0$,

$$\text{ainsi } f'(x) = 1 + 2 = 3$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ 3 & \text{si } x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\end{cases}}$$

c) • Il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = -x + C_1$.

Comme f est continue, alors: $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = -x + C_1$

et comme $f(0) = \frac{\pi}{2}$, on a: $C_1 = \frac{\pi}{2}$.

D'où: $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$.

• Il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $f(x) = 3x + C_2$.

Comme f est continue, alors: $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$, $f(x) = 3x + C_2$.

et comme $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, on a $C_2 = -\frac{3\pi}{2}$.

D'où: $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $f(x) = 3x - \frac{3\pi}{2}$

Donc :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 3x - \frac{3\pi}{2} & \text{si } x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

4-a) Comme $I = [0, \pi]$, $\boxed{\text{Arccos}(\cos x) = x}$

b) • Soit $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $\boxed{\text{Arcsin}(\sin y) = y}$.

• Soit $y \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$

$$\text{Arcsin}(\sin y) = \text{Arcsin}(-\sin(y + \pi)) = -\text{Arcsin}(\sin(y + \pi))$$

Or $y + \pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc: $\boxed{\text{Arcsin}(\sin y) = -(y + \pi)}$

c) Soit $x \in I$,

$$\text{Arcsin}(\cos(2x)) = \text{Arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - 2x))$$

Or $x \in [0, \pi]$ donc $\frac{\pi}{2} - 2x \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

• si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $\frac{\pi}{2} - 2x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc d'après b),

$$\text{Arcsin}(\cos(2x)) = \frac{\pi}{2} - 2x$$

• si $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$, alors $\frac{\pi}{2} - 2x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ donc d'après b),

$$\text{Arcsin}(\cos(2x)) = -(\frac{\pi}{2} - 2x + \pi) = 2x - \frac{3\pi}{2}$$

Donc :

$$A_{\text{com}}(\cos(2x)) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 2x - \frac{3\pi}{2} & \text{si } x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

(7)

d) Aimi

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} - 2x = \frac{\pi}{2} - x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x + 2x - \frac{3\pi}{2} = 3x - \frac{3\pi}{2} & \text{si } x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

5-a) • Soit $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, $f(x) = f(-x) = \frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi}{2} - |x|$

• Soit $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[$, $f(x) = f(-x) = -3x - \frac{3\pi}{2} = 3|x| - \frac{3\pi}{2}$.

Aimi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - |x| & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 3|x| - \frac{3\pi}{2} & \text{si } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

b) • Soit $x \in [-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - |x| = \frac{3\pi}{2} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 3|x| - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} & \text{si } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

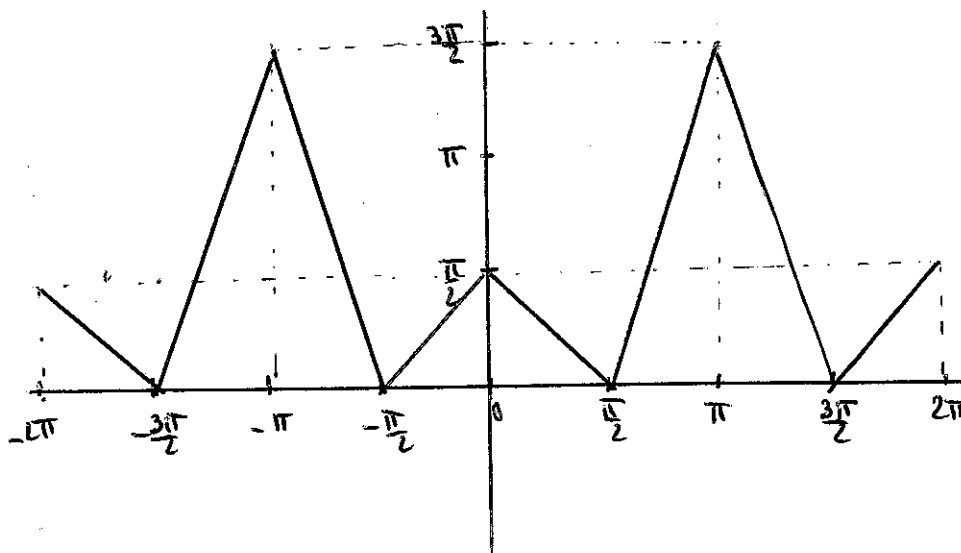
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = -\pi & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{impossible}) \\ |x| = \pi & \text{si } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \pi$$

• Comme f est 2π -périodique, les solutions sont :

$$\{ \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

6-



Problème 2:

1- Soit $a \in \mathbb{R}^{++}$, $a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$

Donc : $\boxed{a + \frac{1}{a} \geq 2}$

2-a) Soit $k \in (\mathbb{I}, \infty \mathbb{I})$, en appliquant 1. à $a = \frac{x_k^2}{x_{k+1}^2} \in \mathbb{R}^{++}$, on a :

$$\frac{x_k^2}{x_{k+1}^2} + \frac{x_{k+1}^2}{x_k^2} \geq 2$$

Donc $\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k^2}{x_{k+1}^2} + \frac{x_{k+1}^2}{x_k^2} \right) \geq \sum_{k=1}^n 2$

D'où : $\boxed{\frac{1}{x_{n+1}^2} A_n + x_{n+1}^2 B_n \geq 2n}$

b) . Pour $n=1$, $A_n = A_1 = x_1^2$ $B_n = B_1 = \frac{1}{x_1^2}$ donc $A_n B_n = 1$

Ainsi $A_n B_n \geq n^2$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $A_n B_n \geq n^2$.

$$\begin{aligned} A_{n+1} B_{n+1} &= (A_n + x_{n+1}^2) \left(B_n + \frac{1}{x_{n+1}^2} \right) \\ &= A_n B_n + \frac{1}{x_{n+1}^2} A_n + x_{n+1}^2 B_n + 1 \\ &\geq n^2 + 2n + 1 \\ &\geq (n+1)^2 \end{aligned}$$

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n B_n \geq n^2}$

3-a) Soit $k \in (\mathbb{I}, \infty \mathbb{I})$, en appliquant 1. à $a = \frac{\sqrt{B_n}}{\sqrt{A_n}} x_k^2 \in \mathbb{R}^{++}$, on a :

$$\frac{\sqrt{B_n}}{\sqrt{A_n}} x_k^2 + \frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{B_n}} \frac{1}{x_k^2} \geq 2$$

Donc $\boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{B_n}}{\sqrt{A_n}} x_k^2 + \frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{B_n}} \frac{1}{x_k^2} \right) \geq 1}$

b)

(9)

$$\text{Dmc: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{B_n}}{\sqrt{A_n}} x_k^2 + \frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{B_n}} \frac{1}{x_k^2} \right) \geq \sum_{k=1}^n 1$$

$$\text{Aim: } \frac{1}{2} \frac{\sqrt{B_n}}{\sqrt{A_n}} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{B_n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2} \geq n$$

$$\text{D'ici: } \frac{1}{2} \frac{\sqrt{B_n}}{\sqrt{A_n}} A_n + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{B_n}} B_n \geq n$$

$$\text{Dmc: } \frac{1}{2} \sqrt{B_n} \sqrt{A_n} + \frac{1}{2} \sqrt{A_n} \sqrt{B_n} \geq n$$

$$\text{Aim: } \sqrt{A_n} \sqrt{B_n} \geq n$$

$$\text{Dmc: } \boxed{A_n B_n \geq n^2}$$

4 - Pours: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n \in \mathbb{R}^*$, alors, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$\text{On: } A_n B_n \geq n^2 \text{ donc } B_n \geq \frac{n^2}{A_n}$$

$$\text{Aim: } \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}}$$