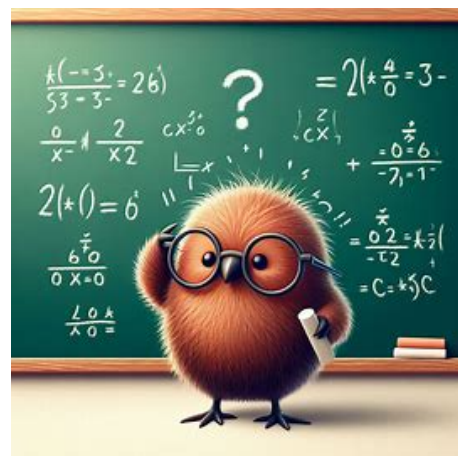


Corrections : vacances d'automne



Correction de la séance 1 :



Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$S = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} 2^{n+i-j}.$$



On a :

$$\begin{cases} 0 \leq i \leq n \\ i \leq j \leq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq i \leq j \\ 0 \leq j \leq n \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} 2^{n+i-j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{n}{j} \binom{j}{i} 2^{n+i-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} 2^i \right) 2^{n-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (2+1)^j 2^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 3^j 2^{n-j} = (3+2)^n \\ &= 5^n. \end{aligned}$$



Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{(2x+1)^4}$ et de $g : x \mapsto \sqrt{e^{3x} + e^{2x}}$.



– Posons $u : x \mapsto 2x+1$, on a $u' : x \mapsto 2$ et $f = \frac{1}{2} u' \cdot u^{-4}$. Ainsi, une primitive de f est $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-3} \cdot u^{-3}$, c'est-à-dire :

$$x \mapsto -\frac{1}{6(2x+1)^3}.$$

– On a $g : x \mapsto e^x \sqrt{e^x + 1}$. Posons $v : x \mapsto e^x + 1$, on a $v' : x \mapsto e^x$ et $g = v' \sqrt{v} = v' \cdot v^{1/2}$. Ainsi, une primitive de g est $\frac{2}{3} v^{3/2}$, c'est-à-dire :

$$x \mapsto \frac{2}{3} (e^x + 1)^{3/2}.$$

Correction de la séance 2 :



Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z \end{cases}$$



$$\begin{aligned} (S) \begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (4-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (4-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (4-\lambda)z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + (4-\lambda)y + z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ (4-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + y + (4-\lambda)z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + (4-\lambda)y + z = 0 \\ (1-(4-\lambda)^2)y + (\lambda-3)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - (4-\lambda)L_1 \\ (\lambda-3)y + (3-\lambda)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + (4-\lambda)y + z = 0 \\ (5-\lambda)(\lambda-3)y + (\lambda-3)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - (4-\lambda)L_1 \\ (\lambda-3)y + (3-\lambda)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $\lambda \neq 3$,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + (4-\lambda)y + z = 0 \\ (5-\lambda)y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (5-\lambda)y = 0 \\ (6-\lambda)y = 0 \\ y = z \end{cases}$$

- Si $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq 6$,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

- Si $\lambda = 6$,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$$

- Si $\lambda = 3$,

$$(S) \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

Donc l'ensemble des solutions est : $\{(0, 0, 0)\}$ si $\lambda \notin \{3, 6\}$, $\{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$ si $\lambda = 6$, $\{(x, y, -x - y), x, y \in \mathbb{R}\}$ si $\lambda = 3$.



Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \text{sh}(x) \ln(\text{ch}(x))$ et calculer $I = \int_{1/2}^1 \frac{1}{1+4(x-1)^2} dx$.



- Posons $u : x \mapsto \text{ch}(x)$, on a $u' : x \mapsto \text{sh}(x)$ et $f = u' \ln(u)$. Ainsi, une primitive de f est $u \ln(u) - u$, c'est-à-dire :

$$x \mapsto \text{ch}(x) \ln(\text{ch}(x)) - \text{ch}(x).$$

- $x \mapsto \frac{1}{1+4(x-1)^2} = \frac{1}{1+(2(x-1))^2}$ est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{1+u^2}$ avec $u : x \mapsto 2(x-1)$. Donc :

$$I = \left[\frac{1}{2} \text{Arctan}(2(x-1)) \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{2} \text{Arctan}(0) - \frac{1}{2} \text{Arctan}(-1) = \frac{\pi}{8}.$$

Correction de la séance 3 :



Déterminer le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2.$$

On pourra poser : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 2$



- On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 2$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$.
- L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 4r + 4 = 0$ qui a pour racine double 2.
Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (\lambda + \mu n)2^n.$$

De plus :

$$\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ 2(\lambda + \mu) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(-2 + \frac{3}{2}n\right)2^n = -2^{n+1} + 3n2^{n-1}.$$

- Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(-2 + \frac{3}{2}n\right)2^n = -2^{n+1} + 3n2^{n-1} + 2.$$



Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{x}{(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)}$ et de $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$.



- Posons $u : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$, on a $u' : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$ et $f = \frac{1}{2} \frac{u'}{u}$. Ainsi, une primitive de f est $\frac{1}{2} \ln|u|$, c'est-à-dire :

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln|\ln(x^2 + 1)|.$$

- On a $g : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$. Posons $v : x \mapsto e^{-x}$, on a $v' : x \mapsto -e^{-x}$ et $g = -\frac{v'}{\sqrt{1 - v^2}}$. Ainsi, une primitive de g est $\text{Arccos}(v)$, c'est-à-dire :

$$x \mapsto \text{Arccos}(e^{-x}).$$

Correction de la séance 4 :



Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor.$$



On a $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = n + n + 1 + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$ donc :

$$\left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 2n + 1 + \left\lfloor 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \right\rfloor.$$

Or $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ donc $n < \sqrt{n}\sqrt{n+1} < n+1$ et ainsi $2n < 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} < 2n+2$. Donc :

$$\left\lfloor 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \right\rfloor = 2n \text{ ou } 2n+1.$$

De plus : $2\sqrt{n}\sqrt{n+1} - 2n = 2\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1$. Donc $2n < 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} < 2n+1$. Ainsi :

$$\left\lfloor 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \right\rfloor = 2n.$$

D'où :

$$\left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 4n + 1.$$



Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\sqrt{1-x^2})$ et calculer $I = \int_0^{\pi/4} (\tan(x) + \tan^3(x)) dx$.



- Posons $u : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, on a $u' : x \mapsto \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et $f = -u' \cos(u)$. Ainsi, une primitive de f est $-\sin(u)$, c'est-à-dire :

$$x \mapsto -\sin(\sqrt{1-x^2}).$$

- $x \mapsto \tan(x) + \tan^3(x) = (1 + \tan^2(x)) \tan(x)$ est de la forme $u' u$ avec $u : x \mapsto \tan(x)$. Donc :

$$I = \left[\frac{1}{2} (\tan(x))^2 \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \tan^2(0) = \frac{1}{2}.$$

Correction de la séance 5 :



Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{-1 \pm \sqrt{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$. Calculer f' . En déduire une autre expression de f .



Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 \pm \sqrt{2}\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(x^2+2x-1) - (x^2-2x-1)(2x+2)}{(x^2+2x-1)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)^2} \\ &= \frac{2x \cdot 4x - 2(2x^2-2)}{(x^2+2x-1)^2 + (x^2-2x-1)^2} \\ &= \frac{4x^2+4}{2(x^2-1)^2 + 8x^2} \\ &= \frac{4x^2+4}{2x^4+4x^2+2} \\ &= \frac{2(x^2+1)}{x^4+2x^2+1} \\ &= \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Donc, si $g: x \mapsto f(x) - 2\operatorname{Arctan}(x)$, alors $g' = 0$. Ainsi, g est constante sur $] -\infty, -1 - \sqrt{2}[$, sur $] -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}[$ et sur $] -1 + \sqrt{2}, +\infty[$.

- $1 \in] -1 + \sqrt{2}, +\infty[$ et $g(1) = \operatorname{Arctan}(-1) - 2\operatorname{Arctan}(1) = \frac{3\pi}{4}$ donc :

$$\forall x \in] -1 + \sqrt{2}, +\infty[, f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x) - \frac{3\pi}{4}.$$

- $-1 \in] -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}[$ et $g(-1) = \operatorname{Arctan}(-1) - 2\operatorname{Arctan}(-1) = \frac{\pi}{4}$ donc :

$$\forall x \in] -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}[, f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{4}.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \operatorname{Arctan}(1) - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{5\pi}{4}$, donc :

$$\forall x \in] -\infty, -1 - \sqrt{2}[, f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x) + \frac{5\pi}{4}.$$



Déterminer une primitive de $f: x \mapsto \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\ln(x)\right)}{x}$ et calculer $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{(3\sin(x)+2)^5} dx$.



- Posons $u: x \mapsto \frac{\pi}{2}\ln(x)$, on a $u': x \mapsto \frac{\pi}{2x}$ et $f = \frac{2}{\pi} u' \tan(x)$. Ainsi, une primitive de f est $-\frac{2}{\pi} \ln|\cos(u)|$, c'est-à-dire :

$$x \mapsto -\frac{2}{\pi} \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln(x)\right)\right|.$$

- $x \mapsto \frac{\cos(x)}{(3\sin(x)+2)^5} = \cos(x)(3\sin(x)+2)^{-5}$ est de la forme $\frac{1}{3} u' u^{-5}$ avec $u: x \mapsto 3\sin(x)+2$. Donc :

$$I = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-4} (3\sin(x)+2)^{-4} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{12} (3 \cdot 1 + 2)^{-4} + \frac{1}{12} (3 \cdot 0 + 2)^{-4} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{5^4} \right).$$