PCSI 1 2025/2026

Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 1 :

A rendre pour le : lundi 15 septembre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq n \text{ et } \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ m = f(n).$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ f(k) = k$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $f(n+1) = n+1$.
3. Conclure. On précisera bien les raisonnements utilisés.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire et $2-$périodique.

1. Montrer que :
$$f(1) = 0.$$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = 0.$$

Problème 1 :

1. **Inégalité de convexité**
   Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
   On suppose que f est convexe, c'est-à-dire que $f'' \geq 0$.
   Soient $x, y \in I$ tels que $x \leq y$.
   (a) Soit $t \in [0,1]$, montrer que :
   $$x \leq (1-t)x + ty \leq y.$$
   (b) On considère la fonction g définie par :
   $$g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (1-t)f(x) + tf(y) - f\big((1-t)x + ty\big). \end{array}$$
   Montrer que g est deux fois dérivable et calculer g' et g''.
   (c) Etudier les variations de g'.
   (d) Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
   (e) Déduire des questions précédentes que :
   $$\forall t \in [0,1],\ f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$
   (On pourra traiter plusieurs cas selon le signe de g'.)
2. **Fonctions puissances**
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \exp(n \ln x) = x^n.$$
   Cette relation permet d'étendre la notion de puissance entière à des puissances réelles. On pose :
   $$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).$$
   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction h définie par :
   $$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(\alpha \ln x). \end{array}$$
   Montrer que h est dérivable et calculer h'.

3. **Vers l'inégalité de Hölder**
   Soit $p \in]1,+\infty[$.
   (a) Montrer que :
   $$\exists! q \in]1,+\infty[, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$
   On considère, dans toute la suite, le réel q vérifiant cette propriété.
   (b) Montrer que :
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \forall t \in [0,1], \ln((1-t)x+ty) \geq (1-t)\ln x + t\ln y.$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.$$