

Devoir à la maison n° 2 :**A rendre pour le : lundi 6 octobre****Les résultats doivent être encadrés.****Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.****Exercice 1 :**Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On suppose que $b|a^2 + 1$. Montrer que :

$$b|a^4 + 1 \Leftrightarrow b|2.$$

Exercice 2 :

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor.$$

Problème 1 :

Dans ce problème, on s'intéresse à la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f:]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2 \cos x - 6 \sin x + 8}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

1. (a) Résoudre l'équation d'inconnue
- $x \in \mathbb{R}$
- :

$$\sin x - \cos x = 1.$$

- (b) Résoudre l'équation d'inconnue
- $x \in \mathbb{R}$
- :

$$6 \sin x - 2 \cos x = 8.$$

2. (a) Calculer la dérivée de f .
 (b) Calculer les limites en $(-\pi)^+$ et en π^- de f .
 (c) Étudier les variations de f .
 (d) Montrer que f admet un minimum et calculer sa valeur.
 (e) Tracer f .
3. (a) Montrer que f est bijective de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ vers un intervalle I que l'on précisera.
 Dans toute la suite, on notera f^{-1} la bijection réciproque de $f: [\frac{\pi}{2}, \pi[\rightarrow I$.
 (b) Calculer $f^{-1}(2)$.
 (c) Étudier la dérivabilité de f^{-1} .
 (d) Étudier les variations de f^{-1} .

4. On pose :

$$\begin{aligned} g:]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

- (a) Montrer que g est bijective et exprimer g^{-1} en fonction de Arctan .
 (b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

5. On pose :

$$\begin{aligned} h: [1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x^2 - 6x + 5. \end{aligned}$$

- (a) Montrer que h est bijective de $[1, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
 On notera h^{-1} la bijection réciproque de $h: [1, +\infty[\rightarrow J$.
 (b) Calculer h^{-1} .

6. (a) Soit
- $x \in]-\pi, \pi[$
- . On pose
- $t = \tan \frac{x}{2}$
- . Montrer que :

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ et } \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

- (b) Montrer que : $f = h \circ g$.
 (c) En déduire f^{-1} en fonction Arctan .
 (d) Calculer, lorsqu'elle existe, la dérivée de f^{-1} .