

Samedi 20 septembre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé,
il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition
en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

1. En raisonnant par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (q, r) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} n = 5q + r \\ r \in \llbracket 0, 4 \rrbracket. \end{cases}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n^2 est un multiple de 5. Montrer que n est un multiple de 5.
3. Montrer que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2 :

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_{n+1-u_n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, n+1-u_n \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + 1.$$

Exercice 3 :

Etudier les variations de la fonction :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(e^x + 2e^{-x}). \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Etudier la vérité des propositions suivantes :

- 1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0.$$

- 2.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0).$$

Problème 1 :

On admet que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists!(n, d) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = n + d \\ n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0, 1[. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit (n, d) l'unique couple de $\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x = n + d \\ n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0, 1[. \end{cases}$.

n est appelé la partie entière de x , d est appelé la partie fractionnaire de x et on note :

$$n = \lfloor x \rfloor \text{ et } d = \{x\}.$$

Dans tout ce problème la notation $\{x\}$ désignera la partie fractionnaire de x et pas l'ensemble réduit à x .

On pose :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1[\\ x &\mapsto \{x\}. \end{aligned}$$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x \in \mathbb{Z} \iff f(x) = 0.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x \in [0, 1[\iff f(x) = x.$$

- (c) Montrer que f est 1-périodique.

- (d) Montrer que f n'est ni paire, ni impaire.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

2. (a) Déterminer le terme général de la suite (u_n) .

- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 1, v_1 = \{x\} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} \cdot v_n.$$

3. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \{x\}^{u_n}.$$

- (b) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 0) \iff v_1 = 0.$$

Problème 2 :

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, f(f(n) + f(m)) = n + m.$$

1. Soit f une solution du problème.

- (a) Montrer que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, f(n) = f(m) \Rightarrow n = m.$$

- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2f(n) = f(n-1) + f(n+1).$$

- (c) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\forall n \in \{0, 1\}, f(n) = an + b.$$

- (d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an + b.$$

- (e) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n.$$

2. Conclure.

Problème 3 :

On donne les valeurs approchées :

$$\ln(2) \approx 0,69 \text{ et } \frac{1}{e} \approx 0,36.$$

On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \ln(x) + \ln(2).$$

1. Etudier les variations de f et préciser ses limites aux bords de son domaine de définition.
2. (a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 0$.
(b) En déduire le nombre de solutions de l'équation :

$$x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \quad (E).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que :

$$f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \iff n^2 = 2^n.$$

- (b) On suppose que $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$ et $2^{p-1} = p$.
- (c) Donner deux valeurs de $p \in \mathbb{N}^*$ telles que $2^{p-1} = p$.
- (d) En déduire les solutions de (E).
4. (a) Montrer que f définit une bijection de $[e^{-2}, +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
On note f^{-1} sa bijection réciproque.
(b) Calculer $f^{-1}(0)$.
(c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} .
(d) Calculer $(f^{-1})'(0)$.