Devoir surveillé n° 2 :

Samedi 11 octobre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :
Déterminer les nombres premiers p tels que $11p+1$ soit le carré d'un entier.

Exercice 2 :

1. Déterminer son ensemble de validité et montrer la formule suivante :
$$\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi.$$
2. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{2k}{n+1}\right).$$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que S_n est bien définie.
   (b) Montrer que :
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{2k}{n+1}\right) = \pi - \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{2(n+1-k)}{n+1}\right).$$
   (c) En déduire la valeur de S_n.

Exercice 3 :

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \cos^2((n+1)x) = \frac{\sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)}{4\sin x} + \frac{1}{2}.$$
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de :
$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Problème 1 :
L'objectif de ce problème est d'étudier les propriétés de la fonction définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arccos}(\cos(x)) + \operatorname{Arcsin}(\cos(2x)).$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
   (b) Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f(\pi)$.
   (c) Etudier la périodicité de f.
   (d) Etudier la parité de f.
   (e) Expliquer pourquoi on peut étudier f uniquement sur $I = [0, \pi]$.
2. (a) Résoudre l'équation d'inconnue $y \in \mathbb{R}$:
   $$\operatorname{Arccos}(y) + \operatorname{Arcsin}(2y^2 - 1) = \frac{\pi}{2}.$$
   (b) En déduire les solutions sur $\mathcal{D}$ de :
   $$f(x) = \frac{\pi}{2}.$$
3. Une expression simplifiée de f : **première méthode.**
   (a) Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}'$ de f.
   (b) Calculer la dérivée de f sur $\mathcal{D}' \cap I$. On pourra faire apparaître une disjonction de cas.
   (c) Donner une expression simplifiée de f sur I.
4. Une expression simplifiée de f : **deuxième méthode.**
   (a) Calculer $\operatorname{Arccos}(\cos(x))$ pour $x \in I$.
   (b) Calculer $\operatorname{Arcsin}(\sin(y))$ pour $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ puis pour $y \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) En déduire la valeur de $\operatorname{Arcsin}(\cos(2x))$ pour $x \in I$. On pourra faire apparaître une disjonction de cas.
   (d) En déduire une expression simplifiée de f sur I.
5. (a) Déterminer une expression simplifiée de f sur $[-\pi, \pi]$. L'expression finale ne devra faire apparaître que deux cas.
   (b) En déduire les solutions sur $\mathcal{D}$ de :
   $$f(x) = \frac{3\pi}{2}.$$
6. Tracer la courbe représentative de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

Problème 2 :
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \mathbb{R}^*$.
On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}.$$

1. Question préliminaire : montrer que :
   $$\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ a + \frac{1}{a} \geq 2.$$
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
   $$\frac{1}{x_{n+1}^2} A_n + x_{n+1}^2 B_n \geq 2n.$$
   (b) En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n B_n \geq n^2.$$
3. On cherche à obtenir le même résultat par une autre méthode. On n'utilisera donc pas les résultats de la question 2. dans cette question.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{B_n}}{\sqrt{A_n}} x_k^2 + \frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{B_n}} \frac{1}{x_k^2}\right) \geq 1.$$
   (b) En déduire :
   $$A_n B_n \geq n^2.$$
4. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}.$$