

Révisions de calcul intégral

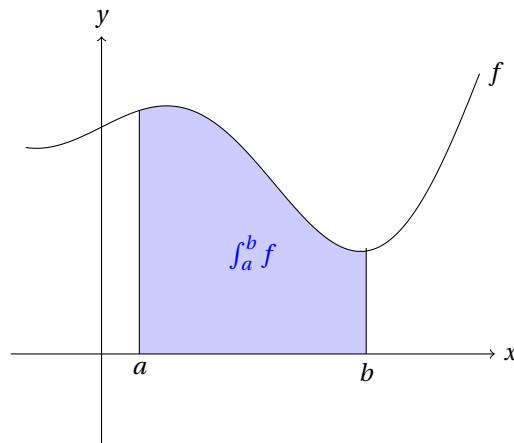
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.

I Introduction de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1 Cas des fonctions positives

Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a, b]$. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme étant l'aire située sous la courbe représentative de f . On la note :

$$\int_a^b f \text{ ou } \int_a^b f(x) dx.$$



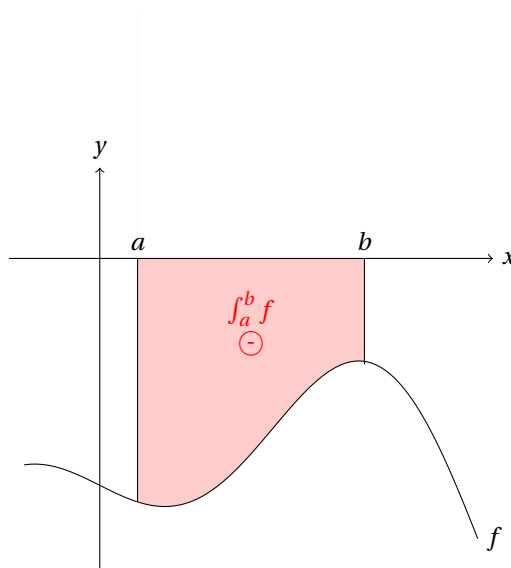
Remarque : Dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$ la variable x est muette, on a donc, par exemple :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

La notation " dx " n'est pas définie mathématiquement, on ne l'utilisera que pour indiquer, si besoin, le nom de la variable d'intégration.

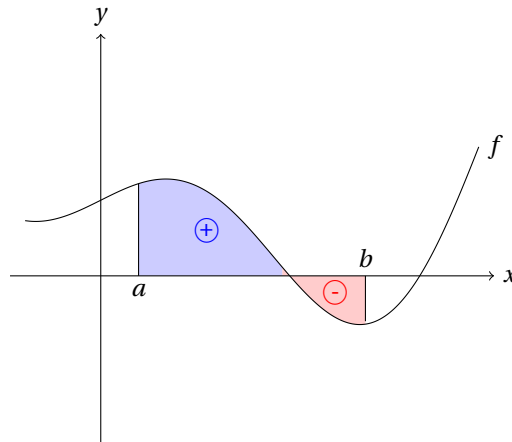
1.2 Cas des fonctions de signe quelconque

- Soit f une fonction continue est négative sur le segment $[a, b]$. Comme $-f$ est positive, il semble naturel de définir l'intégrale de f en utilisant à nouveau une aire. Afin de prendre en compte le signe de f , l'intégrale de f sur $[a, b]$ est définie comme étant l'opposé de l'aire située entre sa courbe représentative et l'axe des abscisses. On introduit donc la notion d'aire munie d'un signe qu'on appelle aire algébrique.



- Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme étant l'aire algébrique située entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses. On la note :

$$\int_a^b f \text{ ou } \int_a^b f(x) dx.$$



Remarque :

- Si $a = b$, l'aire considérée est nulle, on a donc, pour une fonction f continue quelconque :

$$\int_a^a f = 0.$$

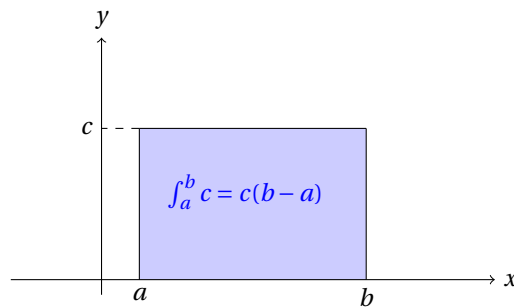
- En considérant les aires algébriques, on a :

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

On peut donc adapter les résultats au cas où on n'a pas l'hypothèse $a \leq b$.

1.3 Cas particulier d'une fonction constante

Soit $c \in \mathbb{R}$. L'intégrale de la fonction constante égale à c sur $[a, b]$ est l'aire algébrique du rectangle de base $[a, b]$ qui a pour longueur $b - a$ et de hauteur c :



On a donc le résultat suivant :

Proposition 1

Soit $c \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b c = c(b - a).$$

II Propriétés de l'intégrale

Les propriétés suivantes découlent des propriétés géométriques des aires.

Proposition 2 : Linéarité de l'intégrale

Soient f, g des fonctions continues sur $[a, b]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Proposition 3 : Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \geq 0$.

Proposition 4 : Croissance de l'intégrale

Soient f, g des fonctions continues sur $[a, b]$.

Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Remarque : Ce résultat signifie qu'on peut intégrer des inégalités. Il ne faut pas oublier que l'inégalité intégrée doit être vraie sur $[a, b]$ et qu'on doit avoir $a \leq b$.

Proposition 5 : Inégalité triangulaire intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Preuve. On a : $-|f| \leq f \leq |f|$, donc, par croissance de l'intégrale :

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

Ainsi, par propriété de la valeur absolue :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

□

Proposition 6 : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $c \in]a, b[$. Alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Remarque : La relation de Chasles permet de "découper" une intégrale.

III Intégration et primitives

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

3.1 Rappels sur les primitives

Définition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et telle que $F' = f$.

Proposition 7

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\{F + C, C \in \mathbb{K}\}.$$

C'est à dire qu'une fonction G est une primitive de f sur I si et seulement si il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in I, G(x) = F(x) + C.$$

Remarque : Il n'y a donc pas d'unicité de la primitive mais, sur un intervalle, les primitives sont égales à une constante près.

3.2 Intégrale et primitives

Proposition 8 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$.

La fonction
$$\begin{array}{ccc} F: & I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t) dt \end{array}$$
 est l'unique primitive de f s'annulant en a .

Remarque : Il faut bien choisir un nom pour la variable d'intégration qui ne soit pas celui de la variable de la fonction F , c'est pourquoi on a appelé t la variable d'intégration et pas x .

Corollaire 1

Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur I .

Corollaire 2

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$.

Alors f admet une unique primitive F telle que $F(a) = 0$, c'est-à-dire qui s'annule en a et on a :

$$\begin{array}{ccc} F: & I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t) dt. \end{array}$$

Proposition 9

Si f est une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I alors :

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

On note :

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

Les formules suivantes découlent des formules de dérivation :

Formule 1

Soit u une fonction dérivable.

Fonction $f : x \mapsto$	Primitive $F : x \mapsto$	u à valeurs dans
$u' \cdot u^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$u' \cdot u^n, n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$u' \cdot e^u$	e^u	$\mathbb{R}$
$u' \cdot \cos u$	$\sin u$	$\mathbb{R}$
$u' \cdot \sin u$	$-\cos u$	$\mathbb{R}$

IV Exemples de calculs d'intégrales

4.1 Exemples corrigés

- $I_1 = \int_1^2 \frac{1 + \ln(x)}{x} dx$:
 $x \mapsto \frac{1 + \ln(x)}{x}$ est de la forme $u' \cdot u$ avec $u : x \mapsto 1 + \ln(x)$. Comme $u' u$ a pour primitive $\frac{1}{2} u^2$, on a donc :

$$I_1 = \left[\frac{1}{2} (1 + \ln(x))^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} (1 + \ln(2))^2 - \frac{1}{2} (1 + \ln(1))^2 = \frac{1}{2} (1 + \ln(2))^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln(2) (\ln(2) + 2).$$

- $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos(x) - 2 \sin(x)) dx$:
 Par linéarité de l'intégrale :

$$I_2 = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = 3 [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3(1 - 0) - 2(0 + 1) = 1.$$

- $I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$:
 $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+2x+3}$ est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 2x + 3$. Comme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ a pour primitive $\frac{1}{2} \ln u$, on a donc :

$$I_3 = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \ln(6) - \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2} \ln(3).$$

- $I_4 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x} dx$:
 $x \mapsto \frac{e^x}{1+2e^x}$ est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto 1 + 2e^x$. Comme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ a pour primitive $\frac{1}{2} \ln u$, on a donc :

$$I_4 = \left[\frac{1}{2} \ln(1 + 2e^x) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(1 + 2e) - \frac{1}{2} \ln(3) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}.$$

- $I_5 = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx$:
 $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 5$. Comme $\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitive $\sqrt{u}$, on a donc :

$$I_5 = \left[\sqrt{x^2 + 5} \right]_{-1}^2 = \sqrt{9} - \sqrt{6} = 3 - \sqrt{6}.$$

- $I_6 = \int_1^2 \frac{6-4x}{(x^2-3x-4)^5} dx$:
 $x \mapsto \frac{6-4x}{(x^2-3x-4)^5}$ est de la forme $-2u'.u^{-5}$ avec $u : x \mapsto x^2 - 3x - 4$. Comme $-2u'.u^{-5}$ a pour primitive $-2 \cdot \frac{u^{-4}}{-4} = \frac{1}{2u^4}$, on a donc :

$$I_6 = \left[\frac{1}{2(x^2-3x-4)^4} \right]_1^2 = \frac{1}{2 \cdot 6^4} - \frac{1}{2 \cdot 6^4} = 0.$$

- $I_7 = \int_0^{\pi/3} \sin(3x) \cos^3(3x) dx$:
 $x \mapsto \sin(3x) \cos^3(3x)$ est de la forme $-\frac{1}{3}u'.u^3$ avec $u : x \mapsto \cos(3x)$. Comme $-\frac{1}{3}u'.u^3$ a pour primitive $-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}u^4 = -\frac{1}{12}u^4$, on a donc :

$$I_7 = \left[-\frac{1}{12} \cos^4(3x) \right]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = 0.$$

- $I_8 = \int_{-1}^0 x e^{-x^2+1} dx$:
 $x \mapsto x e^{-x^2+1}$ est de la forme $-\frac{1}{2}u'.e^u$ avec $u : x \mapsto -x^2 + 1$. Comme $-\frac{1}{2}u'.e^u$ a pour primitive $-\frac{1}{2}e^u$, on a donc :

$$I_8 = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2+1} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2}e + \frac{1}{2} = \frac{1-e}{2}.$$

4.2 Exemples à traiter

- $I_1 = \int_0^1 \left(\frac{3}{\sqrt{x+1}} + 2e^{-x} \right) dx \dots\dots\dots = 6\sqrt{2} - 4 - \frac{2}{e}$
- $I_2 = \int_{-1}^1 (x-1)(x^2-2x+2) dx \dots\dots\dots = -6$
- $I_3 = \int_3^4 \frac{6x-3}{(x^2-x)^3} dx \dots\dots\dots = \frac{1}{32}$
- $I_4 = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \dots\dots\dots = \ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$
- $I_5 = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin x}{x+1+\cos x} dx \dots\dots\dots = \ln\left(\frac{\pi+2}{4}\right)$
- $I_6 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx \dots\dots\dots = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$
- $I_7 = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x + \cos(2x)}{(x^2 + \sin(2x))^3} dx \dots\dots\dots = \frac{15}{4\pi^4}$
- $I_8 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx \dots\dots\dots = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$