Chapitre 1 : Rudiments de logique, généralités et révisions sur les suites et les fonctions

I Bases des mathématiques

1.1 Symboles mathématiques

Ensembles

- $\emptyset$: l'ensemble vide, c'est-à-dire, l'ensemble ne contenant aucun élément,
- $\subset$: inclusion entre deux ensembles,
- $\not\subset$: négation de l'inclusion entre deux ensembles,
- $\in$: appartenance d'un élément à un ensemble,
- $\notin$: négation de l'appartenance d'un élément à un ensemble,
- $\cap$: intersection de deux ensembles,
- $\cup$: réunion de deux ensembles,
- $\setminus$: un ensemble privé d'un autre ensemble, c'est-à-dire dont tous les éléments de l'autre ensemble sont exclus,
- $\{x \in E, \ldots\}$: l'ensemble des éléments x de E tels que ....

Remarque :

- Un ensemble peut être défini en extension. Dans ce cas, on énumère tous ces éléments. Par exemple, $E = \{1, 3, 8\}$ est un ensemble défini en extension. On a : $1 \in E$ et $\{1\} \subset E$.
- Un ensemble peut également être défini en compréhension. Dans ce cas, on donne une ou des propriétés qui caractérisent ses éléments. Par exemple, $\{2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des nombres pairs et $\{2n+1,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des nombres impairs, il s'agit d'ensembles définis en compréhension.

1.2 Ensembles de nombres

Définition 1

- On appelle ensemble des entiers naturels, l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- On appelle ensemble des entiers relatifs l'ensemble $\mathbb{Z}$ constitué des entiers naturels et de leurs opposés.
- On appelle nombre décimal tout nombre de la forme $\dfrac{p}{10^n}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.
- On appelle nombre rationnel tout quotient d'entiers, c'est-à-dire tout nombre de la forme $\dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.
  Un réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.
- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Remarque :

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$,
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$,
- $\mathbb{D} = \left\{\dfrac{p}{10^n},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
- $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\right\}$,
- l'ensemble des nombres irrationnels est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- les nombres rationnels sont de la forme $\dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, dans cette écriture, on ne suppose pas que la fraction est sous forme irréductible. Si besoin, on peut le supposer, c'est-à-dire, imposer à p et q de ne pas avoir de diviseur commun dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

1.3 Intervalles

Définition 2 : Intervalles de $\mathbb{R}$

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des formes suivantes :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq x \leq b\}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $a < b$
  (intervalle fermé et borné ou **segment**) ;
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq x\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
  (intervalle fermé non-majoré) ;
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}\ x \leq b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$
  (intervalle fermé non-minoré) ;
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x < b\}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $a < b$
  (intervalle borné ouvert) ;
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ x < b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$
  (intervalle ouvert non-minoré) ;
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\ a < x\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
  (intervalle ouvert non-majoré) ;
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq x < b\}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $a < b$
  (intervalle borné semi-ouvert à droite) ;
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x \leq b\}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $a < b$
  (intervalle borné semi-ouvert à gauche) ;
- $\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
  (intervalle réduit à un point ou **singleton**) ;
- l'ensemble vide $\emptyset$
- $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$
  (intervalle non-majoré et non-minoré)

Remarque :

- Un intervalle est un ensemble qui est "en un seul morceau". La notion d'intervalle est une notion fondamentale pour les résultats de continuité.
- $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Définition 3

Soient $a,b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq b$, $[\![a,b]\!]$ désigne l'intervalle d'entiers compris entre a et b, c'est-à-dire :

$$[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z},\ a \leq n \leq b\}.$$

1.4 Définition d'une fonction

Définition 4

Soient A et B deux ensembles non vides.
On appelle **application** f la donnée d'un ensemble de départ A, d'un ensemble d'arrivée B et d'une correspondance qui à tout élément x de A associe un unique élément de B noté $f(x)$.
On la note f : $\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
Si $x \in A$ et $y = f(x)$, on dit que :

- y est l'**image** de x par f
- x est un **antécédent** de y par f (pas forcément unique).

On note $\mathcal{F}(A,B)$ ou B^A l'ensemble des applications de A dans B.

Remarque :

- $f \in \mathcal{F}(A,B)$ signifie que f est une application dont l'ensemble de départ est A et l'ensemble d'arrivée est B. $f \in \mathcal{F}(A,B)$ et $f : A \to B$ sont synonymes.
- On remarquera que les flèches sont différentes : $A \to B$ (qui se lit de A dans B) indique les ensembles de départ et d'arrivée alors que $x \mapsto f(x)$ (qui se lit à x associe $f(x)$) indique la valeur de l'application.
- Il ne faut pas confondre f et $f(x)$. Si on a $f \in \mathcal{F}(A,B)$ et $x \in A$ alors $f(x) \in B$.

Définition 5

On appelle **fonction** réelle une application telle qu'il existe un ensemble $\mathcal{D}$ inclus dans $\mathbb{R}$ tel que $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$.
L'ensemble $\mathcal{D}$ est alors appelé ensemble de définition de la fonction.

Remarque :

- Une fonction réelle est une application dont l'ensemble départ n'est pas nécessairement précisé et dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.
- En pratique, on confondra les notions de fonctions et d'applications.
- En pratique, on peut écrire soit f la fonction : $f : x \mapsto f(x)$.

1.5 Définition d'une suite

Définition 6

Une suite réelle est une application qui à un entier naturel associe un réel. La suite qui à tout entier naturel n associe le réel u_n est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).
L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ signifie que (u_n) est une suite réelle.
- Il ne faut pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec son terme d'indice n : u_n. Si on a $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $u_n \in \mathbb{R}$.
- Par extension, nous appellerons aussi suite réelle une famille de réels indexée par un intervalle d'entiers du type $[\![n_0, +\infty[\![$. La suite est dans ce cas notée $(u_n)_{n\geq n_0}$. Les propriétés de ce chapitre s'adaptent à ce type de suites.

Une suite peut être définie de trois manières différentes :

- **De manière explicite** : chaque terme de la suite est donné directement en fonction de n.
  Par exemple : on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n^2+1}.$$
- **Par récurrence** : u_n est exprimé en fonction des termes précédents : u_{n-1}, ... u_0.
  Par exemple : on considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
  $$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$
  $$v_0 = 0, v_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n.$$
- **De manière implicite** : u_n est défini par une propriété non explicite dépendant de n.
  Par exemple : on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution de l'équation $x^3 + x - 1 = n$.

II Quantificateurs

2.1 Généralités

Les quantificateurs ne sont pas des abréviations mais des symboles mathématiques.
On ne peut les utiliser que dans des phrases mathématiques.

Définition 7

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble E.

- la proposition $\forall x \in E, P(x)$, qui se lit « pour tout x appartenant à E, on a $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tout élément x de E.
- la proposition $\exists x \in E,\ P(x)$, qui se lit « il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E.
- la proposition $\exists! x \in E,\ P(x)$, qui se lit « il existe un unique x appartenant à E tel que $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour un unique élément x de E.

Méthode 1 : Montrer un énoncé commençant par $\forall$

Pour montrer un énoncé du type $\forall x \in E$, $P(x)$, on fixe un élément quelconque x de E et on démontre que $P(x)$ est vraie. La rédaction est donc la suivante :
Soit $x \in E$.
... } preuve de $P(x)$.

Méthode 2 : Utiliser un énoncé commençant par $\forall$

On suppose ici que la proposition $\forall x \in E$, $P(x)$ est vraie.
Cette proposition peut être appliquée à tout élément x de E, il peut être défini par :

Soit $x \in E$, alors $P(x)$, ...(ici x est fixé quelconque)
ou
Posons $x = \ldots$, on a $x \in E$ car ... donc $P(x)$, ...(ici x est particulier et a été choisi judicieusement).

➪ **Exemple 1 :**

1. Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $2ab \leq a^2 + b^2$.
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $2\sqrt{xy} \leq x + y$.

Méthode 3 : Montrer un énoncé commençant par $\exists$ ou $\exists!$

- Pour montrer un énoncé du type $\exists x \in E$, $P(x)$, il faut construire un $x \in E$ pour lequel $P(x)$ est vraie.
  On recherche au brouillon un x adapté. Puis on rédige ainsi :
  Posons $x =$ ....
  $x \in E$ car ...
  ... } preuve de $P(x)$.
- Pour montrer qu'un objet x vérifiant $P(x)$ est unique, on se donne x et y vérifiant la propriété, et on montre que $x = y$. La rédaction est alors :
  Soient $x, y \in E$.
  Supposons que $P(x)$ et $P(y)$ sont vraies.
  ... } preuve que $x = y$.

Méthode 4 : Utiliser un énoncé commençant par $\exists$

On suppose ici que la proposition $\exists x \in E$, $P(x)$ est vraie.
On est assuré de l'existence de l'élément x mais on ne connaît pas sa valeur, on le défini par :

Il existe $x \in E$ tel $P(x)$, ...

Ecrire "il existe" en toutes lettres, signifie que l'on considère cet élément, il est donc bien défini.

➪ **Exemple 2 :** Soit n un entier naturel pair. Montrer que n^2 est pair.

➪ **Exemple 3 :** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}$, $-2x + \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$.

Proposition 1 : Permutation de quantificateurs identiques

Soit $P(x,y)$ une proposition dépendant de deux éléments : x appartenant à un ensemble E et y appartenant à un ensemble F.

- la proposition $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, $P(x,y)$ est synonyme de la proposition $\forall y \in F$, $\forall x \in E$, $P(x,y)$,
- la proposition $\exists x \in E$, $\exists y \in F$, $P(x,y)$ est synonyme de la proposition $\exists y \in F$, $\exists x \in E$, $P(x,y)$.

Proposition 2 : Négation des quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble E.

- non $\Big(\forall x \in E,\ P(x)\Big)$ est équivalente à $\Big(\exists x \in E,\ \text{non } P(x)\Big)$.
- non $\Big(\exists x \in E,\ P(x)\Big)$ est équivalente à $\Big(\forall x \in E,\ \text{non } P(x)\Big)$.

➪ **Exemple 4 :**

1. Montrer que la proposition suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ x \geq y.$$

2. Montrer que la proposition suivante, obtenue en échangeant les quantificateurs, est fausse :

$$\exists y \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Z},\ x \geq y.$$

2.2 Raisonnement par l'absurde

Méthode 5 : Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on peut supposer son contraire (non P) et arriver à une absurdité.

➪ **Exemple 5 :** Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que n^2 soit pair. Montrer que n est pair.

➪ **Exemple 6 :** Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ce résultat est supposé connu et peut être utilisé.

➪ **Exemple 7 :** Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f^2 = f$. Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

III Généralités sur les suites et les fonctions

3.1 Opérations sur les suites

Définition 8

Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On définit les suites :

$$(s_n) = \lambda(u_n) + \mu(v_n) \text{ et } (p_n) = (u_n).(v_n),$$

(combinaison linéaire et produit de (u_n) et (v_n)) par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \lambda u_n + \mu v_n \text{ et } p_n = u_n.v_n$$

Si de plus (v_n) ne s'annule pas , on définit la suite $(q_n) = \dfrac{(u_n)}{(v_n)}$ (quotient de (u_n) par (v_n)) par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

3.2 Opérations sur les fonctions

Définition 9

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions :

$$\lambda f + \mu g : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array} \qquad f.g : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x).g(x) \end{array}$$

(combinaison linéaire de f et g) (produit de f et g)

Si de plus g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, on définit la fonction :

$$\frac{f}{g} : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

(quotient de f par g)

Remarque :

- Cette définition signifie que :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x), \quad (f.g)(x) = f(x).g(x), \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- Dans $\lambda f + \mu g$, le signe + désigne une addition entre deux fonctions. Dans $\lambda f(x) + \mu g(x)$, le signe + désigne une addition entre deux nombres. Il y a donc deux significations pour le signe +.
  Cette définition est naturelle et son seul but est de définir les opérations classiques sur les fonctions.
- g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$ signifie que :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ g(x) \neq 0.$$

  Il ne faut pas confondre avec $g \neq 0$ qui signifie que g n'est pas la fonction constante nulle, c'est-à-dire :

$$\exists x \in \mathcal{D},\ g(x) \neq 0.$$

- Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+9 \end{array}$.

  Alors, par définition : $f+g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+x+10 \end{array}$ et $\dfrac{f}{g} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x^2+9} \end{array}$.

Définition 10

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathcal{D}_1$, $f(x) \in \mathcal{D}_2$. On appelle composée de f par g et on note $g \circ f$ la fonction :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_1 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Remarque :

- Comme g est définie sur $\mathcal{D}_2$, pour que $g(f(x))$ ait un sens, il faut avoir $f(x) \in \mathcal{D}_2$.
- En général $f \circ g \neq g \circ f$. Par exemple, posons : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+9 \end{array}$.

  Alors : $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+10 \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+1)^2+9. \end{array}$ Ainsi $f \circ g(1) = 11$ et $g \circ f(1) = 13$.
  D'où $f \circ g(1) \neq g \circ f(1)$ donc $f \circ g \neq g \circ f$.

3.3 Représentation graphique

Définition 11

Soit $\mathcal{D}$une partie non vide de $\mathbb{R}$, soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, la courbe représentative de f est l'ensemble des points de coordonnées :

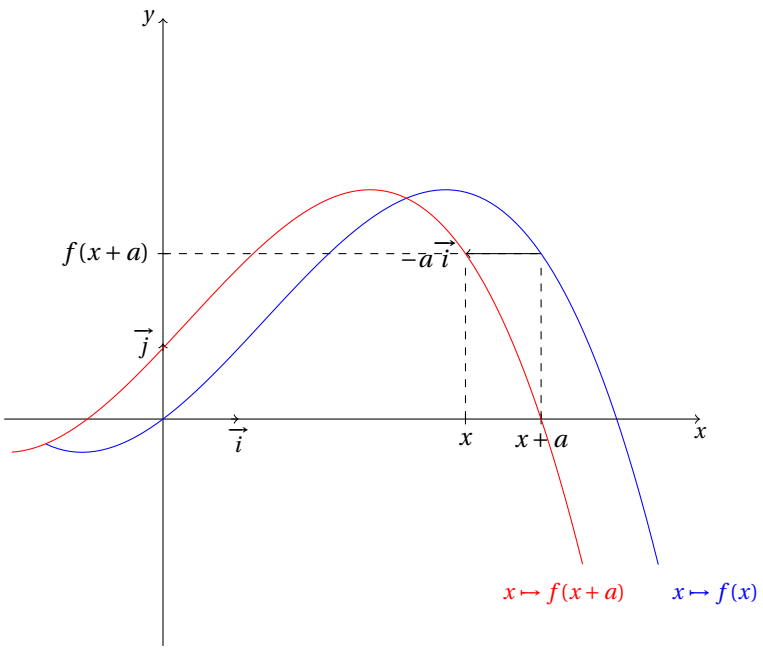
$$(x, f(x)),\ x \in \mathcal{D},$$

dans un repère du plan.

Proposition 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
La courbe représentative de la fonction :

- $x \mapsto f(x+a)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur $-a\vec{i}$
- $x \mapsto f(-x)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- $x \mapsto -f(x)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Preuve.

- Posons $g : x \mapsto f(x+a)$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x,y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f(x-a+a) \Leftrightarrow y = g(x-a) \Leftrightarrow (x-a, y) \in \mathcal{C}_g.$$

  Or $(x-a, y)$ est le translaté de (x, y) par le vecteur $-a\vec{i}$ donc $\mathcal{C}_g$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- Posons $g : x \mapsto f(-x)$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x,y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f(-(-x)) \Leftrightarrow y = g(-x) \Leftrightarrow (-x, y) \in \mathcal{C}_g.$$

  Or $(-x, y)$ est le symétrique de (x, y) par rapport à l'axe des ordonnées donc $\mathcal{C}_g$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- Posons $g : x \mapsto -f(x)$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x,y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow -y = -f(x) \Leftrightarrow -y = g(x) \Leftrightarrow (x, -y) \in \mathcal{C}_g.$$

  Or $(x, -y)$ est le symétrique de (x, y) par rapport à l'axe des abscisses donc $\mathcal{C}_g$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

□

3.4 Parité, imparité

Définition 12

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On suppose ici que $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0, c'est à dire : $\forall x \in \mathcal{D},\ -x \in \mathcal{D}$.
On dit que f est :

- paire ssi :
$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x),$$
- impaire ssi :
$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x).$$

Proposition 4

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Si f est paire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  On peut alors tracer $\mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^+$ et on obtiendra toute la courbe en effectuant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
  On peut alors tracer $\mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^+$ et on obtiendra toute la courbe en effectuant la symétrie par rapport à l'origine.

Preuve.

- Supposons f paire.
  Soit $x \in \mathcal{D}$, soit $y \in \mathbb{R}$.
  $$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f(-x) \Leftrightarrow (-x, y) \in \mathcal{C}_f.$$
  Or $(-x, y)$ est le symétrique de (x, y) par rapport à l'axe des ordonnées donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Supposons f impaire.
  Soit $x \in \mathcal{D}$, soit $y \in \mathbb{R}$.
  $$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = -f(-x) \Leftrightarrow -y = f(-x) \Leftrightarrow (-x, -y) \in \mathcal{C}_f.$$
  Or $(-x, -y)$ est le symétrique de (x, y) par rapport à l'origine donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

□

Remarque :

- Il ne faut pas confondre la parité des fonctions et celle des nombres entiers. C'est le contexte qui permet de savoir de quelle parité il s'agit.
- Si f est une fonction impaire et si $0 \in \mathcal{D}$ alors $f(0) = 0$. En effet, on a $f(-0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$.
- L'ensemble $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, dans ce cas on peut donc "oublier" de vérifier que $\forall x \in \mathcal{D},\ -x \in \mathcal{D}$.
- Une fonction peut n'être ni paire, ni impaire. Par exemple, posons $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 + 1 \end{array}$. f est n'est pas impaire car $f(0) = 1$ donc $f(0) \neq 0$ et f n'est pas paire car $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$ donc $f(1) \neq f(-1)$.
- Pour montrer un résultat sur toutes les fonctions, on ne peut pas faire uniquement les cas des fonctions paires et des fonctions impaires.

IV Logique

4.1 Propositions logiques

Définition 13

- Une proposition est un énoncé qui est soit vrai soit faux, les deux cas s'excluant mutuellement.
- Une table de vérité est un tableau qui indique si une propriété est vraie ou fausse.

Définition 14

Soient P et Q deux propositions.

- non P, appelée négation de P, est une proposition qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie ;
- P et Q est une proposition qui est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies, fausse dans tous les autres cas ;
- P ou Q est une proposition qui est vraie lorsque l'une au moins des propositions P ou Q est vraie, fausse dans l'unique cas où P et Q sont fausses.

Remarque :

• La table de vérité correspondant à ces propositions est :

P	Q	non P	P et Q	P ou Q
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

• Le "ou" mathématique est inclusif contrairement au "ou" utilisé dans la langue française.
• Les mots "ou" et "et" sont considérés comme des symboles mathématiques, ils peuvent donc être utilisés dans les phrases logiques.

Proposition 5 : Distributivité

Soient P, Q et R trois propositions.

- $\Big((P \text{ et } Q) \text{ ou } R\Big)$ est équivalente à $\Big((P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)\Big)$.
- $\Big((P \text{ ou } Q) \text{ et } R\Big)$ est équivalente à $\Big((P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)\Big)$.

Preuve.

P	Q	R	P et Q	$\Big(\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}\Big)$ ou $\mathbf{R}$	P ou R	Q ou R	$\Big((P$ ou $R)$ et $(Q$ ou $R)\Big)$
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**
V	V	F	V	**V**	V	V	**V**
V	F	V	F	**V**	V	V	**V**
V	F	F	F	**F**	V	F	**F**
F	V	V	F	**V**	V	V	**V**
F	V	F	F	**F**	F	V	**F**
F	F	V	F	**V**	V	V	**V**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

Les tables de vérité de $\Big((P \text{ et } Q) \text{ ou } R\Big)$ et de $\Big((P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)\Big)$ sont égales ainsi les deux propositions sont équivalentes.
On montre de même que $\Big((P \text{ ou } Q) \text{ et } R\Big)$ est équivalente à $\Big((P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)\Big)$.

□

Proposition 6 : Négation des connecteurs logiques

Soient P et Q deux propositions.

- non $(P$ ou $Q)$ est équivalente à $\Big((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)\Big)$.
- non $(P$ et $Q)$ est équivalente à $\Big((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)\Big)$
- non (non P) est équivalente à P

Preuve.

P	Q	P ou Q	non $(P$ ou $Q)$	$\Big((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)\Big)$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

Les tables de vérité de non $(P$ ou $Q)$ et de $\Big((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)\Big)$ sont égales ainsi les deux propositions sont équivalentes.
On raisonne de même pour les autres points.

□

4.2 Implications et équivalences

Définition 15 : Implication

Soient P et Q deux propositions.
On note $P \Longrightarrow Q$ la proposition $\Big((\text{non } P) \text{ ou } Q\Big)$.
Le connecteur $\Longrightarrow$ est appelé implication et $P \Longrightarrow Q$ se lit « P implique Q »

Définition 16 : Equivalence

Soient P et Q deux propositions.
On note $P \Longleftrightarrow Q$ la proposition $\Big(P \Longrightarrow Q \text{ et } Q \Longrightarrow P\Big)$.
Le connecteur $\Longleftrightarrow$ est appelé équivalence et la proposition $P \Longleftrightarrow Q$ se lit « P équivaut à Q ».

⚠ **Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ ne sont pas des abréviations mais des symboles mathématiques.**

On ne peut les utiliser que dans des phrases mathématiques.

La seule abréviation que l'on utilise est ssi pour : si et seulement si.

Proposition 7 : Négation d'une implication

Soient P et Q deux propositions.
non $\Big(P \Longrightarrow Q\Big)$ est équivalente à $\Big(P$ et (non $Q)\Big)$

Preuve. non $\Big(P \Longrightarrow Q\Big)$ est équivalente à $\Big($ non $\Big($ non P ou $Q\Big)\Big)$, c'est-à-dire $\Big($ non (non P) et (non Q)$\Big)$,
qui est donc équivalente à $\Big(P$ et (non Q)$\Big)$. □

Définition 17

Soient P et Q deux propositions.

- On appelle **réciproque** de l'implication $P \Longrightarrow Q$, l'implication $Q \Longrightarrow P$.
- On appelle **contraposée** de l'implication $\Big(P \Longrightarrow Q\Big)$, l'implication $\Big($non $Q \Longrightarrow$ non $P\Big)$

Proposition 8 : Contraposition

Soient P et Q deux propositions. L'implication $P \Longrightarrow Q$ et sa contraposée $\Big($non $Q \Longrightarrow$ non $P\Big)$ sont équivalentes.

Preuve. $\Big($non $Q \Longrightarrow$ non $P\Big)$ est équivalente à non $\Big($non $Q\Big)$ou non P, c'est-à-dire à Q ou non P, soit $P \Longrightarrow Q$. □

Définition 18

Soient P et Q deux propositions.

- On dit que P est une condition **suffisante** pour Q ssi $P \Longrightarrow Q$.
- On dit que P est une condition **nécessaire** pour Q ssi $Q \Longrightarrow P$.
- On dit que P est une condition **nécessaire et suffisante** pour Q ssi $P \Longleftrightarrow Q$.

Méthode 6 : Preuve d'une implication

Soient P et Q deux propositions. Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on peut utiliser les méthodes suivantes :

- **Raisonnement direct :** On suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.
- **Raisonnement par contraposée :** On suppose que Q est fausse et on montre que P est fausse.
- **Raisonnement par l'absurde :** On suppose que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.

➪ **Exemple 8 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x \geq 0 \Longrightarrow x^2 + x \geq 0.$$

On utilisera trois méthodes de raisonnement.

➪ **Exemple 9 :** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $c \leq d$.
Montrer que :

$$a + c = b + d \Rightarrow a = b \text{ et } c = d.$$

Méthode 7 : Preuve d'une équivalence

Soient P et Q des propositions.
Pour montrer que $P \Longleftrightarrow Q$, on procède, dans les cas compliqués, par double implication. On montre alors séparément que
$P \Longrightarrow Q$ et que $Q \Longrightarrow P$

➪ **Exemple 10 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, ax + be^x = 0) \Leftrightarrow a = b = 0.$$

V Monotonie

5.1 Monotonie d'une suite

Définition 19

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- croissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.
- décroissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$.
- monotone ssi elle est soit croissante soit décroissante.
- strictement croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.
- strictement décroissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.
- strictement monotone ssi elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante.
- constante ssi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$
  ssi : $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = c$.
- stationnaire ssi elle est constante à partir d'un certain rang
  ssi : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ u_{n+1} = u_n$
  ssi : $\exists c \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ u_n = c$.

Méthode 8

Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut étudier le signe de :

$$u_{n+1} - u_n.$$

➪ **Exemple 11 :** On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}.$$

Etudier la monotonie de (u_n).

5.2 Monotonie d'une fonction

Définition 20

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est :

- croissante ssi :
  $$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$
- décroissante ssi :
  $$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$
- strictement croissante ssi :
  $$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x < y \implies f(x) < f(y)$$
- strictement décroissante ssi :
  $$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x < y \implies f(x) > f(y)$$
- (strictement) monotone ssi elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.
- constante ssi : $\forall x, y \in \mathcal{D}, f(x) = f(y)$
  ssi : $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D}, f(x) = c$.

Proposition 9

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Soit f une fonction strictement monotone. On a :

- si f est strictement croissante :

$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x < y \iff f(x) < f(y)$$

et

$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x \leq y \iff f(x) \leq f(y),$$

- si f est strictement décroissante :

$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x < y \iff f(x) > f(y)$$

et

$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x \leq y \iff f(x) \geq f(y).$$

Preuve. Supposons f strictement croissante.

- Par hypothèse, on a :
$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x < y \implies f(x) < f(y).$$
- Soient $x, y \in \mathcal{D}$. On suppose que $f(x) < f(y)$.
  - si $x > y$ alors, comme f est strictement croissante, on a $f(x) > f(y)$ ce qui est absurde. Donc $x \leq y$.
  - si $x = y$, on a $f(x) = f(y)$ (par définition d'une fonction) ce qui est absurde. Donc $x < y$.

  Ainsi :
$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ f(x) < f(y) \implies x < y.$$
- Donc :
$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x < y \iff f(x) < f(y).$$
- Soient $x, y \in \mathcal{D}$. On suppose $x \leq y$. On alors $x < y$ ou $x = y$.
  - Si $x < y$, alors comme f est strictement croissante $f(x) < f(y)$ donc $f(x) \leq f(y)$.
  - Si $x = y$, alors $f(x) = f(y)$ donc $f(x) \leq f(y)$.

  Dans tous les cas $f(x) \leq f(y)$ donc :
$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$
- Soient $x, y \in \mathcal{D}$. On suppose que $f(x) \leq f(y)$.
  Si $x > y$ alors, comme f est strictement croissante, on a $f(x) > f(y)$ ce qui est absurde. Donc $x \leq y$.
  Ainsi :
$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ f(x) \leq f(y) \implies x \leq y.$$
- Donc :
$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x \leq y \iff f(x) \leq f(y).$$

□

VI Systèmes linéaires

6.1 Préliminaires

La résolution d'équation est un des rares cas où on pourra introduire des équivalences. En effet, quand on résout une équation, on cherche l'ensemble des solutions c'est-à-dire on cherche à connaître les éléments qui sont solution et également ceux qui ne le sont pas. On doit donc considérer les cas où l'équation est vérifiée et ceux où elle n'est pas vérifiée.

Par exemple, si on cherche à résoudre l'équation $2x + 3 = 9$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On peut écrire :
soit $x \in \mathbb{R}$,

$$2x + 3 = 9 \iff 2x = 6.$$

On n'a pas considéré qu'on avait $2x + 3 = 9$, cette propriété peut être vraie ou fausse. Par contre, elle a bien la même vérité que $2x = 6$.

En conclusion, lorsque c'est possible, les équivalences sont adaptées à la résolution d'équations et également d'inéquations.

6.2 Généralités

Définition 21

- On appelle **équation linéaire à p inconnues** une équation de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b$, d'inconnues $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ et où $a_1, \ldots, a_p, b \in \mathbb{R}$.
- On appelle **système linéaire à n équations et p inconnues** tout système de la forme :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, les $x_j \in \mathbb{R}$ sont les **inconnues** du système, les $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ sont les **coefficients** du système, et les b_i forment le **second membre** du système. On appelle **solution de** $(\mathcal{S})$ tout p-uplet $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$ vérifiant les n équations de $(\mathcal{S})$.

Définition 22

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système l'une des trois opérations suivantes :

- multiplication d'une ligne L_i par un réel λ non nul ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) ce que l'on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$,
- échange des lignes L_i et L_j avec $i \neq j$ ce que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$,
- ajout de λL_j à L_i avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ ce que l'on note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Proposition 10

En effectuant des opérations élémentaires sur un système, on obtient un système équivalent, c'est-à-dire un système ayant le même ensemble de solutions.

Remarque : Les opérations élémentaires admettent toutes une opération réciproque, c'est pourquoi l'ensemble des solutions est conservé. L'opération réciproque de :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$,
- $L_i \leftrightarrow L_j$ est $L_i \leftrightarrow L_j$,
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$.

Remarque : Dans les cas particuliers de systèmes linéaires à deux ou trois inconnues, l'ensemble des solutions s'interprète géométriquement comme une intersection de droites ou de plans. Ainsi, l'ensemble des solutions peut être :

- vide : pas de solution,
- réduit à un point : une solution unique,
- une droite : une infinité de solutions, avec un paramètre,
- un plan : une infinité de solutions, avec deux paramètres,
- l'espace entier : une infinité de solutions, avec trois paramètres.

6.3 Algorithme du pivot de Gauss

Le but de l'algorithme du pivot de Gauss est de faire des opérations élémentaires sur un système de façon à obtenir un système plus simple à résoudre. Les étapes sont les suivantes :

- on choisit une équation faisant apparaître la première inconnue,
- en effectuant un échange, on place cette équation sur la première ligne,
- on effectue des opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ afin d'éliminer la première inconnue dans toutes les autres équations,
- on répète ces opérations en ne considérant plus ni la première ligne, ni la première inconnue.

L'objectif est d'obtenir, sur les premières lignes, un début de forme triangulaire et, éventuellement, sur les dernières lignes, des termes nuls.

➪ **Exemple 12 :** Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S) \begin{cases} x + y - z &= 1 \\ 2x + y + z &= 4 \\ x - 3y + 2z &= 0 \end{cases}$$

➪ **Exemple 13 :** Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S)\begin{cases} x+y+3z &= 5 \\ x-y-z &= 1 \\ x+z &= 3 \end{cases}$$

➪ **Exemple 14 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(S)\begin{cases} x+2y &= 1 \\ ax+3y &= b \end{cases}$$

➪ **Exemple 15 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S)\begin{cases} 2x+y-3z = a \\ 3x+2y+z = a+3 \\ 7x+4y-5z = 2a+5 \end{cases}$$

VII Principe de récurrence

Théorème 1 : Principe de récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.
Si :

- $P(n_0)$ est vraie,
- $\forall n \geq n_0$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$;

alors pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Preuve. Supposons que :

- $P(n_0)$ est vraie,
- $\forall n \geq n_0$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Supposons également qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $P(n_1)$ soit fausse.
Soit A l'ensemble des entiers $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit fausse.
Comme $n_1 \in A$, alors A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, ainsi A admet un minimum que l'on note N.
Comme $P(n_0)$ est vraie, alors $n_0 \notin A$ donc $N \neq n_0$, ainsi $N > n_0$.
De plus, $N-1 \geq n_0$ et, par minimalité de N, $N-1 \notin A$.
Donc $P(N-1)$ est vraie.
Ainsi, par hypothèse, $P((N-1)+1)$ est vraie, c'est-à-dire $P(N)$ est vraie.
Or $N \in A$, on obtient donc une contradiction.
Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie. □

Méthode 9 : Rédaction d'une preuve par récurrence

- Pour $n = n_0$, on a ...donc ...(le résultat est vrai au rang n_0).
- **Soit** $n \geq n_0$, supposons que ...(le résultat est vrai au rang n).
  On a ...donc ...(le résultat est vrai au rang $n+1$).
- Ainsi, par récurrence, on a ...(conclusion).

➪ **Exemple 16 :** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N},\ n^3 + 5n = 6k.$$

VIII Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques

8.1 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 23

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- arithmétique ssi il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
  r est appelé raison de la suite.
- géométrique ssi il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q u_n$.
  q est appelé raison de la suite.

Proposition 11

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

- Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ alors :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r.$$

- Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ alors :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Preuve.

- Supposons que $(u_n)_{n\geq n_0}$ soit arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. On raisonne par récurrence.
  - Pour $n = n_0$, on a : $u_{n_0} + (n-n_0)r = u_{n_0} = u_n$.
  - Soit $n \geq n_0$. Supposons que $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$.
    On a $u_{n+1} = u_n + r = u_{n_0} + (n-n_0)r + r = u_{n_0} + (n+1-n_0)r$.
  - On a donc prouvé par récurrence que :
$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r.$$
- Supposons que $(u_n)_{n\geq n_0}$ soit géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. On raisonne par récurrence.
  - Pour $n = n_0$, on a : $u_{n_0} q^{n-n_0} = u_{n_0} = u_n$.
  - Soit $n \geq n_0$. Supposons que $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$.
    On a $u_{n+1} = q u_n = q.u_{n_0} q^{n-n_0} = u_{n_0} q^{n+1-n_0}$.
  - On a donc prouvé par récurrence que :
$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

□

Corollaire 1

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr.$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0.q^n.$$

➪ **Exemple 17 :** On pose :

$$u_0 = 5,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - (n+1),$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - n - 2.$$

Déterminer le terme général de la suite (u_n).

8.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 24

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique ssi il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Méthode 10

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique : il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

- On cherche l tel que $l = al + b$.
- On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - l = a(u_n - l)$. Donc en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - l$, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
- On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0.a^n$.
- On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_0.a^n + l$.

➪ **Exemple 18 :** On pose : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n + 1$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

IX Fonctions périodiques

Définition 25

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

- Soit $T \in \mathbb{R}^*$. On dit que f est T-**périodique** ssi

$$\forall x \in \mathcal{D},\ x+T \in \mathcal{D} \text{ et } f(x+T) = f(x).$$

  On dit alors que T est une période de f.
- f est dite périodique ssi existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que f soit T-périodique.

Proposition 12

Soit $T \in \mathbb{R}^*$, soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathcal{D}$, $x+T \in \mathcal{D}$ et $x-T \in \mathcal{D}$, soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D},\mathbb{R})$ une fonction T-périodique. On a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathcal{D},\ x+nT \in \mathcal{D} \text{ et } f(x+nT) = f(x).$$

Preuve.

- Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{D},\ \ x+nT \in \mathcal{D}$ et $f(x+nT) = f(x)$.
  - Pour $n = 0$. Soit $x \in \mathcal{D}$, on a $x+nT = x \in \mathcal{D}$ et $f(x+nT) = f(x)$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $\forall x \in \mathcal{D},\ \ x+nT \in \mathcal{D}$ et $f(x+nT) = f(x)$.
    Soit $x \in \mathcal{D}$, on a : $x+nT \in \mathcal{D}$ donc $(x+nT)+T \in \mathcal{D}$ ainsi $x+(n+1)T \in \mathcal{D}$. De plus :

$$\begin{aligned} f(x+(n+1)T) = f((x+nT)+T) &= f(x+nT) \quad \text{car } f \text{ est } T\text{-périodique,} \\ &= f(x) \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

  - Donc, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{D},\ x+nT \in \mathcal{D} \text{ et } f(x+nT) = f(x).$$

- Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{D},\ \ x-nT \in \mathcal{D}$.
  - Pour $n = 0$. Soit $x \in \mathcal{D}$, on a $x-nT = x \in \mathcal{D}$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $\forall x \in \mathcal{D},\ \ x-nT \in \mathcal{D}$.
    Soit $x \in \mathcal{D}$, on a : On a $x-nT \in \mathcal{D}$ donc $(x-nT)-T \in \mathcal{D}$ ainsi $x-(n+1)T \in \mathcal{D}$.
  - Donc, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{D},\ x-nT \in \mathcal{D}.$$

- On a donc : $\forall n \in \mathbb{Z}^{-*}, \forall x \in \mathcal{D},\ x+nT \in \mathcal{D}$.
  Soient $n \in \mathbb{Z}^{-*}$ et $x \in \mathcal{D}$. On a $-n \in \mathbb{N}$ et $x+nT \in \mathcal{D}$ donc, d'après le premier point : $f((x+nT)+(-n)T) = f(x+nT)$. Ainsi : $f(x) = f(x+nT)$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^{-*}, \forall x \in \mathcal{D},\ x+nT \in \mathcal{D} \text{ et } f(x+nT) = f(x).$$

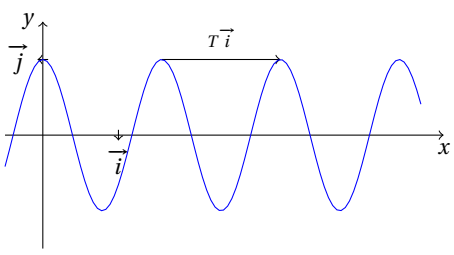
- On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathcal{D},\ x+nT \in \mathcal{D} \text{ et } f(x+nT) = f(x).$$

□

Proposition 13

Soit $T \in \mathbb{R}^*$, soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathcal{D}$, $x+T \in \mathcal{D}$ et $x-T \in \mathcal{D}$, soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D},\mathbb{R})$ une fonction T-périodique. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Si f est T-périodique, avec $T \in \mathbb{R}^{+*}$, alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translations de vecteur $-T\vec{i}$
On peut alors tracer $\mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D} \cap J$, où J est un intervalle de longueur T, et on obtiendra toute la courbe en effectuant les translations de vecteurs $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.



X Autres principes de récurrence

10.1 Récurrence à plusieurs niveaux

Proposition 14 : Principe de récurrence double

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.
Si :

- $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies,
- $\forall n \geq n_0$, ($P(n)$ et $P(n+1)$) $\Longrightarrow P(n+2)$;

alors pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Méthode 11 : Rédaction d'une preuve par récurrence double

- Pour $n = n_0$, on a ...donc ...(le résultat est vrai au rang n_0).
- Pour $n = n_0+1$, on a ...donc ...(le résultat est vrai au rang n_0+1).
- **Soit** $n \geq n_0$, supposons que ...(le résultat est vrai aux rangs n et $n+1$).
  On a ...donc ...(le résultat est vrai au rang $n+2$).
- Ainsi, par récurrence double, on a ...(conclusion).

➪ **Exemple 19 :** On pose : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

Le principe de récurrence double se généralise à un nombre quelconque de niveaux.

Proposition 15 : Principe de récurrence à p niveaux

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.
Si :

- $P(n_0), P(n_0+1), ...P(n_0+p-1)$ sont vraies,
- $\forall n \geq n_0$, ($P(n)$ et ... et $P(n+p-1)$) $\Longrightarrow P(n+p)$;

alors pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Méthode 12 : Rédaction d'une preuve par récurrence à p niveaux

- Pour $n = n_0$, on a ...donc ...(le résultat est vrai au rang n_0).
- ...
- Pour $n = n_0+p-1$, on a ...donc ...(le résultat est vrai au rang n_0+p-1).
- **Soit** $n \geq n_0$, supposons que ...(le résultat est vrai aux rangs $n, n+1, \ldots, n+p-1$).
  On a ...donc ...(le résultat est vrai au rang $n+p$).
- Ainsi, par récurrence à p niveaux, on a ...(conclusion).

➪ **Exemple 20 :** On pose : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, $u_2 = -12$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier relatif multiple de 3.

10.2 Récurrence finie

Proposition 16 : Principe de récurrence finie

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $N > n_0$ et $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in [\![n_0, N]\!]$.
Si :

- $P(n_0)$ est vraie,
- $\forall n \in [\![n_0, N-1]\!]$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$;

alors pour tout $n \in [\![n_0, N]\!]$, $P(n)$ est vraie.

Méthode 13 : Rédaction d'une preuve par récurrence finie

- Pour $n = n_0$, on a …donc …(le résultat est vrai au rang n_0).
- **Soit** $n \in [\![n_0, N-1]\!]$, supposons que …(le résultat est vrai au rang n).
  On a …donc …(le résultat est vrai au rang $n+1$).
- Ainsi, par récurrence finie, on a …(conclusion).

Proposition 17 : Principe de récurrence finie descendante

Soient $n_0, N \in \mathbb{N}$, tels que $N > n_0$ et $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in [\![n_0, N]\!]$.
Si :

- $P(N)$ est vraie,
- $\forall n \in [\![n_0+1, N]\!]$, $P(n) \Longrightarrow P(n-1)$;

alors pour tout $n \in [\![n_0, N]\!]$, $P(n)$ est vraie.

10.3 Récurrence forte

Théorème 2 : Principe de récurrence « forte »

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.
Si :

- $P(n_0)$ est vraie,
- $\forall n \geq n_0$, $\Big(\forall k \in [\![n_0, n]\!], P(k)\Big) \Longrightarrow P(n+1)$;

alors pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Méthode 14 : Rédaction d'une preuve par récurrence forte

- Pour $n = n_0$, on a …donc …(le résultat est vrai au rang n_0).
- **Soit** $n \geq n_0$, supposons que pour tous $k \in [\![n_0, n]\!]$ …(le résultat est vrai aux rangs $k, k+1, \ldots, n$).
  On a …donc …(le résultat est vrai au rang $n+1$).
- Ainsi, par récurrence forte, on a …(conclusion).

➪ **Exemple 21 :** On pose : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \begin{cases} u_{\frac{n}{2}}^2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3u_{\frac{n-1}{2}}^2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

➪ **Exemple 22 :** On pose : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

XI Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Proposition 18

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$. On considère la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \quad (*)$$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$, les suites vérifiant $(*)$ sont de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
- Si l'équation caractéristique admet une solution double $r \in \mathbb{R}$, les suites vérifiant $(*)$ sont de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n) r^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Preuve.

- Supposons que l'équation caractéristique admette deux solutions distinctes r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$.

– Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a u_{n+1} + b u_n &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b) \\ &= \lambda r_1^n . r_1^2 + \mu r_2^n . r_2^2 \text{ car } r_1^2 - a r_1 - b = 0 \text{ et } r_2^2 - a r_2 - b = 0, \\ &= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2} \\ &= u_{n+2}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

– Réciproquement, montrons que si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$, alors, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

∗ Montrons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2$.
On a :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 &=& \lambda + \mu \\ u_1 &=& \lambda r_1 + \mu r_2 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 &=& u_1 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} \lambda + \mu &=& u_0 & \\ \mu(r_2 - r_1) &=& u_1 - r_1 u_0 & L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} \lambda + \mu &=& u_0 & \\ \mu &=& \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} & \text{car } r_1 \neq r_2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda &=& u_0 - \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \frac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1} \\ \mu &=& \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Posons :

$$\lambda = \frac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1} \text{ et } \mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}.$$

On a alors : $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2$.

∗ Montrons, par récurrence double que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

· Pour $n = 0$, par construction de λ et μ, on a :

$$u_0 = \lambda + \mu = \lambda r_1^0 + \mu r_2^0.$$

· Pour $n = 1$, par construction de λ et μ, on a :

$$u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 = \lambda r_1^1 + \mu r_2^1.$$

· Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n \\ &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b) \\ &= \lambda r_1^n . r_1^2 + \mu r_2^n . r_2^2 \text{ car } r_1^2 - a r_1 - b = 0 \text{ et } r_2^2 - a r_2 - b = 0, \\ &= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}. \end{aligned}$$

· Ainsi, par récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

– On a donc montré que les suites vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$, sont les suites de la forme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

• Supposons que l'équation caractéristique admette une solution double $r \in \mathbb{R}$.

– Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + \mu n) r^n$ et montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a u_{n+1} + b u_n &= a(\lambda + \mu(n+1)) r^{n+1} + b(\lambda + \mu n) r^n \\ &= \lambda r^n (a r + b) + \mu r^n ((n+1) a r + n b) \\ &= \lambda r^n (a r + b) + \mu n r^n (a r + b) + \mu r^n . a r \\ &= \lambda r^n . r^2 + \mu n r^n . r^2 + \mu r^n . a r \text{ car } r^2 - a r - b = 0, \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu n r^{n+2} + \mu r^n . a r. \end{aligned}$$

Or, comme r est racine double : $r = -\frac{-a}{2} = \frac{a}{2}$, ainsi $ar = 2r.r = 2r^2$ donc :

$$au_{n+1} + bu_n = \lambda r^{n+2} + \mu n r^{n+2} + 2r^{n+2} = (\lambda + \mu(n+2))r^{n+2}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

– Réciproquement, montrons que si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, alors, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

∗ Montrons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_0 = \lambda$ et $u_1 = (\lambda + \mu)r$.
On a :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \\ u_1 = (\lambda+\mu)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = u_0 \\ (\lambda+\mu)r = u_1 \end{cases}$$

Si $r = 0$, comme r est racine de $r^2 - ar - b = 0$, alors $b = 0$ ce qui est absurde, donc $r \neq 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \\ u_1 = (\lambda+\mu)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = u_0 \\ \mu = \frac{u_1}{r} - u_0 \end{cases}$$

Posons :

$$\lambda = u_0 \text{ et } \mu = \frac{u_1}{r} - u_0.$$

On a alors : $u_0 = \lambda$ et $u_1 = (\lambda + \mu)r$.

∗ Montrons, par récurrence double que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

· Pour $n = 0$, par construction de λ et μ, on a :

$$u_0 = \lambda = (\lambda + \mu.0)r^{\cdot}$$

· Pour $n = 1$, par construction de λ et μ, on a :

$$u_1 = (\lambda+\mu)r = (\lambda + \mu.1)r^1.$$

· Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $u_n = (\lambda + \mu n)r^n$ et $u_{n+1} = (\lambda + \mu(n+1))r^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\lambda + \mu(n+1))r^{n+1} + b(\lambda + \mu n)r^n \\ &= \lambda r^n(ar + b) + \mu r^n((n+1)ar + nb) \\ &= \lambda r^n(ar + b) + \mu n r^n(ar + b) + \mu r^n.ar \\ &= \lambda r^n.r^2 + \mu n r^n.r^2 + \mu r^n.ar \text{ car } r_1^2 - ar_1 - b = 0 \text{ et } r_2^2 - ar_2 - b = 0, \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu n r^{n+2} + \mu r^n.ar \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu n r^{n+2} + \mu r^n.2r^2 \text{ car } r = \frac{a}{2}, \\ &= \lambda(\lambda + \mu(n+2))r^{n+2} \end{aligned}$$

· Ainsi, par récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

– On a donc montré que les suites vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, sont les suites de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

□

➪ **Exemple 23 :** On pose : $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

➪ **Exemple 24 :** On pose : $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

XII Raisonnement par analyse-synthèse

Méthode 15 : Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse permet de :

- déterminer l'ensemble des objets vérifiant une propriété P,
- faire une preuve d'existence,
- faire une preuve d'existence-unicité.

On raisonne en deux temps.
Analyse : on suppose qu'une solution du problème existe et on essaie de déterminer des renseignements sur cette solution.
Synthèse : on examine toutes les hypothétiques solutions trouvées dans la première partie et on détermine si elles vérifient bien la propriété souhaitée.

➪ **Exemple 25 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x = \sqrt{6+x}.$$

➪ **Exemple 26 :** Montrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ y = \frac{x+1}{x-1}$$

➪ **Exemple 27 :** Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que :

$$\exists!(g,h) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{I}(\mathbb{R}),\ f = g + h,$$

où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ et $(g,h) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{I}(\mathbb{R})$ signifie que $g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$.