

Chapitre 4 : Trigonométrie

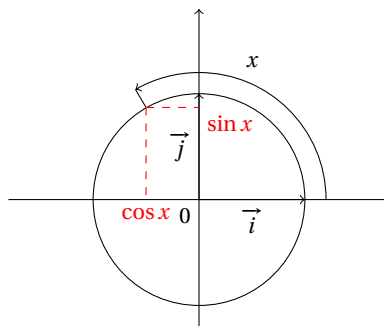
I Cercle trigonométrique

1.1 Définition

Définition 1

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct. On note M le point du cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1) tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ a pour mesure x radians. On note alors $(\cos x, \sin x)$ les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle cosinus la fonction $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \cos(x)$ et sinus la fonction $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \sin(x)$.



1.2 Formules de trigonométrie

Formule 1 : Quelques valeurs

$$\begin{array}{lllll} \cos(0) = 1 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin(0) = 0 & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array}$$

Formule 2 : Cercle trigonométrique

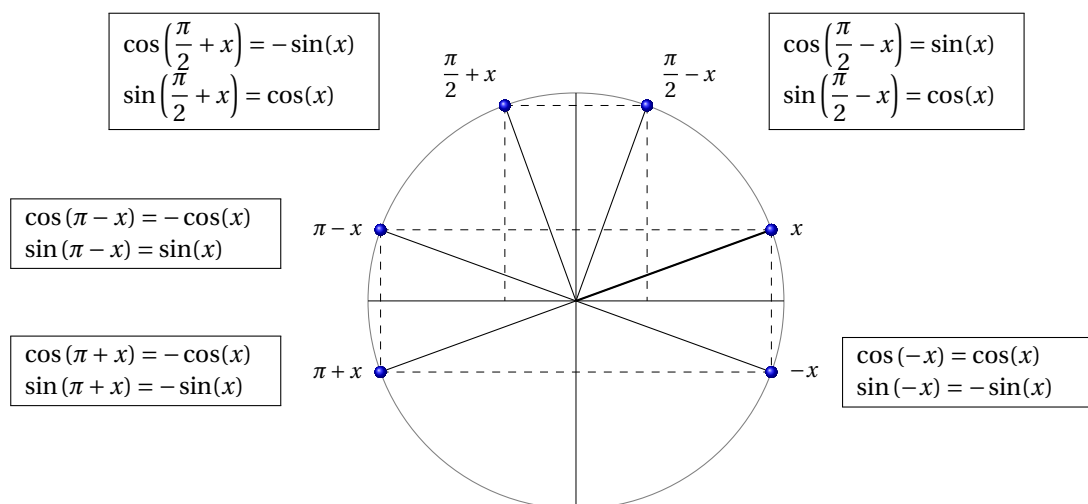
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Formule 3 : Formules élémentaires

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} \cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(\pi + x) = -\cos(x) & \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \end{array}$$

Remarque : Ces formules doivent être visualisées sur le cercle trigonométrique.



Formule 4 : Formules d'addition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$,

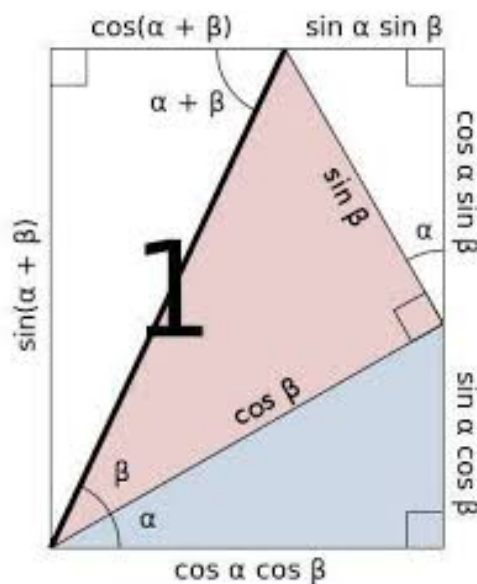
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Justification géométrique des formules d'addition :



Remarque : Il faut savoir, à partir de ces formules, trouver rapidement les valeurs d'un produit de deux cosinus et/ou sinus.

⇨ **Exemple 1 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(a) \cos(b)$ et $\cos(a) \sin(b)$ comme des sommes.

Formule 5 : Formules de l'angle double

Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\sin(2a) = 2\cos(a) \sin(a)$$

⇨ **Exemple 2 :** Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier : $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1.3 Congruences

Définition 2

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, soient $x, y \in \mathbb{R}$.

On dit que x et y sont congrus modulo a et on note $x \equiv y [a]$ ou $x \equiv y \pmod{a}$ si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + ka.$$

Proposition 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$, soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. On a :

$$(x \equiv y [a] \text{ et } z \equiv t [a]) \implies x + z \equiv y + t [a],$$

$$x \equiv y [a] \implies bx \equiv by [ba].$$

Preuve.

- Supposons que $x \equiv y [a]$ et $z \equiv t$.

Il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que : $x = y + ka$ et $z = t + k'a$. On a alors $x + z = y + t + (k + k')a$.

Posons $k'' = k + k'$. On a alors : $k'' \in \mathbb{Z}$ et $x + z = y + t + k''a$ donc :

$$x + z \equiv y + t [a].$$

- Supposons que $x \equiv y [a]$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x = y + ka$. On a alors $bx = by + kba$.

$$bx \equiv by [ba].$$

□

II Équations et inéquations trigonométriques

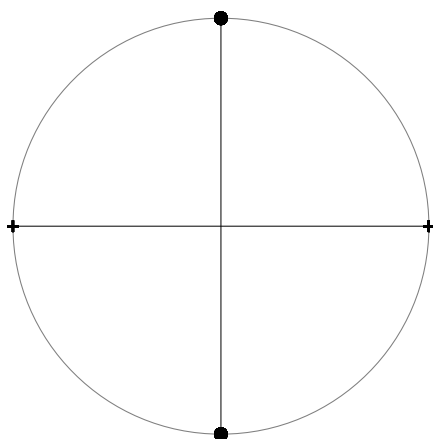
2.1 Équations trigonométriques

Proposition 2

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\sin x = 0 \iff x \equiv 0 [\pi]$$



● $\cos x = 0$

+ $\sin x = 0$

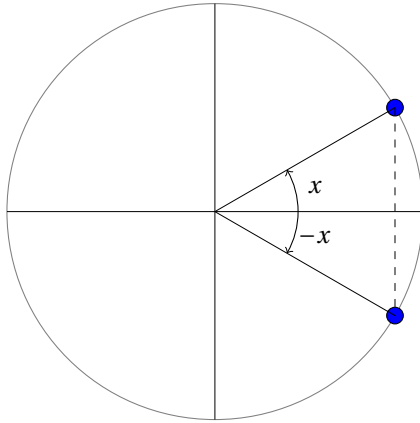
Proposition 3

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,

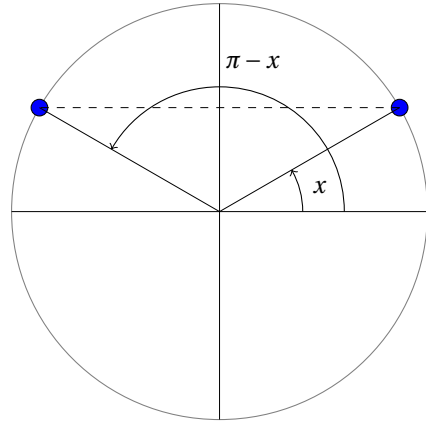
$$\begin{aligned} \bullet \cos x = \cos y &\iff \begin{cases} x \equiv y [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y [2\pi] \end{cases} . \\ \bullet \sin x = \sin y &\iff \begin{cases} x \equiv y [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y [2\pi] \end{cases} . \end{aligned}$$

Remarque :

- Cette proposition peut se lire sur le cercle trigonométrique ce qui permet de la mémoriser.



$$\cos x = \cos y$$



$$\sin x = \sin y$$

- La proposition 2 est un cas particulier de la proposition 3, qui découle de la définition géométrique du cosinus et du sinus. On va déduire de la proposition 2 la preuve du cas général.

Preuve.

- Posons $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$. On a :

$$\cos(x) = \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \cos(y) = \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \cos x = \cos y &\Leftrightarrow \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ &\Leftrightarrow \sin a \sin b = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = 0 \\ \text{ou} \\ \sin b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 0 \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ b \equiv 0 \quad [\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} \equiv 0 \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{x-y}{2} \equiv 0 \quad [\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv y \quad [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

- Posons $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$. On a :

$$\sin(x) = \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \text{ et } \sin(y) = \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sin x = \sin y &\Leftrightarrow \sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ &\Leftrightarrow \cos a \sin b = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos a = 0 \\ \text{ou} \\ \sin b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ b \equiv 0 \quad [\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{x-y}{2} \equiv 0 \quad [\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \pi - y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv y \quad [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

□

⇒ **Exemple 3 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

⇒ **Exemple 4 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1.$$

⇒ **Exemple 5 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$4 \sin x \cos x = 1.$$

2.2 Inéquations trigonométriques

Pour résoudre des inéquations trigonométriques, on utilise la lecture sur le cercle trigonométrique et la périodicité.

⇨ **Exemple 6 :** Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

⇨ **Exemple 7 :** Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x \geq 1.$$

III Fonctions cosinus et sinus

3.1 Propriétés globales

Proposition 4

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Proposition 5

La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x.$$

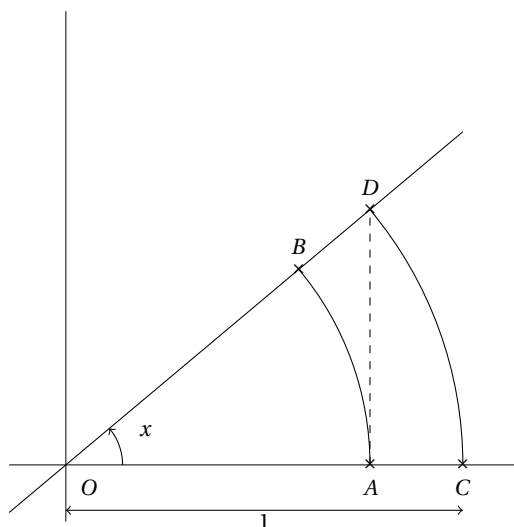
3.2 Dérivées et variations

Proposition 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Preuve.

- Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.



Notons :

- A_1 l'aire du secteur angulaire de centre 0 passant par A et B,
- A_2 l'aire du secteur angulaire de centre 0 passant par C et D,
- A_3 l'aire du triangle 0AD.

On a :

$$A_1 \leq A_3 \leq A_2.$$

On rappelle que l'aire d'un secteur angulaire de rayon r et d'angle α est $\frac{\alpha r^2}{2}$. On a alors :

$$A_1 = \frac{x \cdot \cos^2 x}{2}, \quad A_2 = \frac{x}{2} \text{ et } A_3 = \frac{\cos x \cdot \sin x}{2}.$$

Ainsi :

$$\frac{x \cdot \cos^2 x}{2} \leq \frac{\cos x \cdot \sin x}{2} \leq \frac{x}{2}.$$

Donc :

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Or : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$ donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

On a $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$.

De plus, d'après le point précédent : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = 1$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

Proposition 7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Preuve. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a :

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{\cos x + 1}.$$

Or : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 1) = 2$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

□

Proposition 8

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin.$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Soit $h \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x.$$

Or : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin x.$$

Ainsi $\sin$ est dérivable en x et $\sin'(x) = \cos x$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ donc $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

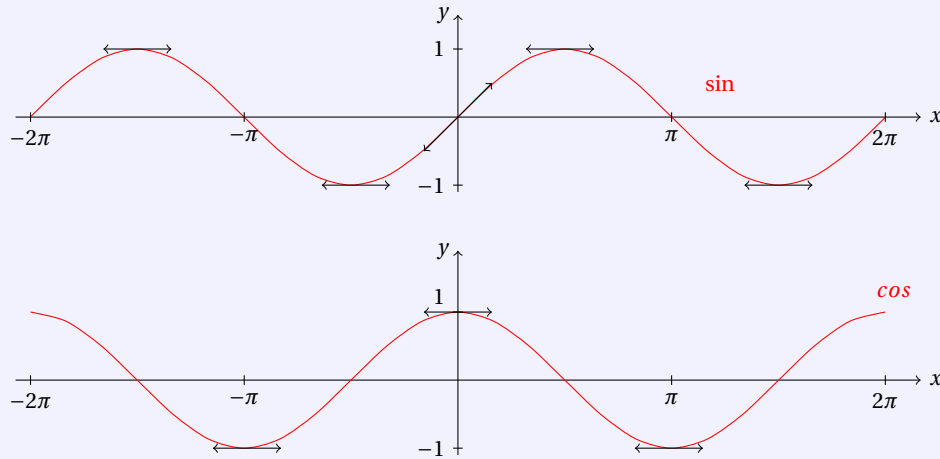
□

Proposition 9

Les variations sur $[0, \pi]$ des fonctions cosinus et sinus sont donnés par :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$(\sin)'(x)$	+	0	-
sin	0	1	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$(\cos)'(x)$	0	-	0
cos	1	0	-1



Corollaire 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors $\cos \circ u$ et $\sin \circ u$ sont dérivables sur I et :

$$\forall x \in I, (\cos \circ u)'(x) = -u'(x) \cdot \sin(u(x)) \text{ et } (\sin \circ u)'(x) = u'(x) \cdot \cos(u(x)).$$

Proposition 10

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|.$$

Preuve.

- Soit $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. On a :

$$|x| \geq 1 \geq |\sin x|.$$

- Posons :

$$f: \begin{array}{lcl} [0, 1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x + x \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{lcl} [0, 1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x - x \end{array}.$$

f et g sont dérivables et, soit $x \in [0, 1[$:

$$f'(x) = \cos x + 1 \geq 0 \text{ et } g'(x) = \cos x - 1 \leq 0.$$

Donc f est croissante et g est décroissante. Comme $f(0) = g(0) = 0$, on a $f \geq 0$ et $g \leq 0$. Ainsi :

$$\forall x \in [0, 1[, -x \leq \sin x \leq x.$$

Donc :

$$\forall x \in [0, 1[, |\sin x| \leq |x|.$$

- Soit $x \in]-1, 0[$, alors $-x \in [0, 1[$ donc $|\sin(-x)| \leq |-x|$ ainsi :

$$|\sin x| \leq |x|.$$

- On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|.$$

□

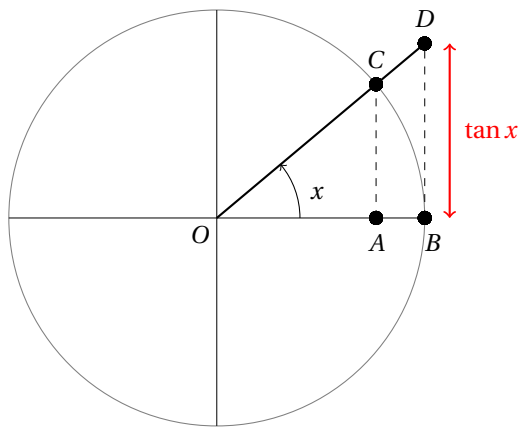
IV Tangente

4.1 Définition

Définition 3

On appelle fonction tangente et on note $\tan$, la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par : $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

Illustration :



D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{OB} = \frac{AC}{OA}.$$

Ainsi :

$$\frac{BD}{1} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

D'où :

$$BD = \tan x.$$

4.2 Formules de trigonométrie

Formule 6 : Quelques valeurs

$$\tan(0) = 0 \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Formule 7 : Formules élémentaires

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi$,

$$\tan(-t) = -\tan(t) \quad \tan(\pi + t) = \tan(t) \quad \tan(\pi - t) = -\tan(t)$$

Formule 8 : Formules d'addition

Si $(a \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$, $(b \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$ et $(a + b \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$, alors

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Si $(a \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$, $(b \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$ et $(a - b \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$, alors

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \tan(a + b) &= \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{aligned}$$

□

Formule 9 : Formules de l'angle double

Si $(a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi})$ et $(a \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}})$

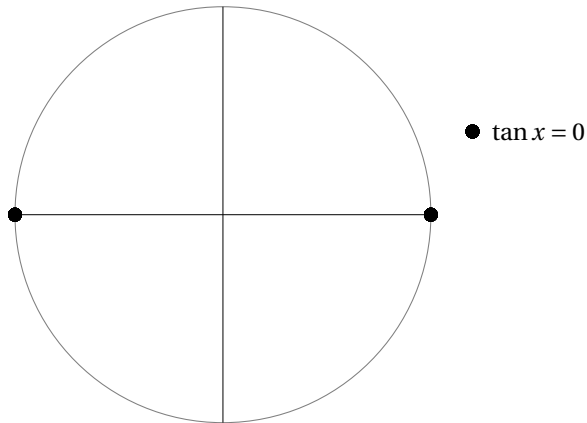
$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

4.3 Résolution d'équations trigonométriques

Proposition 11

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

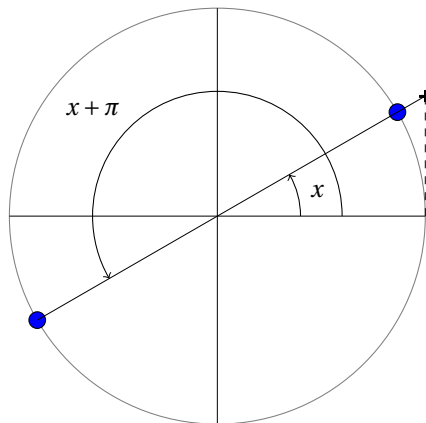
$$\tan x = 0 \iff x \equiv 0 \pmod{\pi}.$$



Proposition 12

Soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a :

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \pmod{\pi}.$$



$$\tan x = \tan y$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \tan x = \tan y &\iff \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y} \\ &\iff \sin x \cos y = \sin y \cos x \\ &\iff \sin x \cos y - \sin y \cos x = 0 \\ &\iff \sin(x - y) = 0 \\ &\iff x - y \equiv 0 \pmod{\pi} \\ &\iff x \equiv y \pmod{\pi} \end{aligned}$$

□

4.4 Fonction tangente

Proposition 13

La fonction $\tan$ est π -périodique et impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(x + \pi) = \tan(x) \text{ et } \tan(-x) = -\tan x.$$

Proposition 14

La fonction $\tan$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Preuve. $\tan$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ comme quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

□

Corollaire 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in I, u(x) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Alors $\tan \circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (\tan \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = u'(x) (1 + \tan^2(u(x))).$$

Proposition 15

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty.$$

Preuve.

On a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$. De plus, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, $\cos(x) > 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty$.

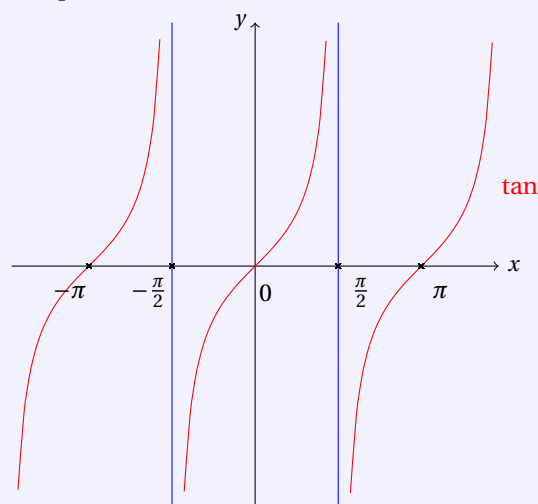
Par imparité, on a $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$.

□

Proposition 16

Les variations sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente sont données par :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'(x)$		+	
$\tan$	$-\infty$	0	$+\infty$



V Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Définition 4

On définit les fonctions cosinus hyperbolique, noté ch , et sinus hyperbolique, noté sh , par :

$$\text{ch} : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \text{sh} : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{matrix}.$$

Proposition 17

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1.$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

□

Proposition 18

ch est paire et sh est impaire.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$,

- $\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{ch}(x)$,
- $\text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\text{sh}(x)$, donc ch est paire et sh est impaire.

□

Proposition 19

ch et sh sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$.

Preuve.

- $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, par opérations, ch et sh sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x).$$

Donc $\text{ch}' = \text{sh}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x).$$

Donc $\text{sh}' = \text{ch}$.

□

Proposition 20

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = +\infty & \text{ch}(0) = 1 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty & \text{sh}(0) = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty \end{array}$$

Preuve. On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ce qui donne le résultat.

□

Proposition 21

- sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ch est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \text{sh}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \text{sh}(x) < 0$.

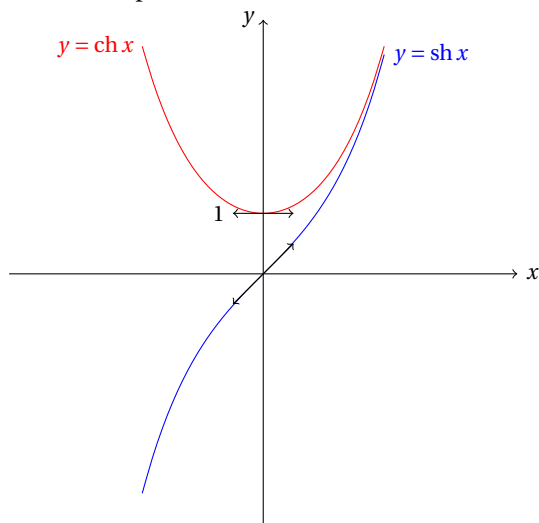
Preuve.

- Soit $x \in \mathbb{R}, \text{sh}'(x) = \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$. Ainsi, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Comme $\text{sh}(0) = 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{sh}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\text{sh}(x) < 0$.
- On a $\text{ch}' = \text{sh}$ donc ch est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- Ainsi ch admet un minimum en 0 valant $\text{ch}(0) = 1$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geq 1$.

□

Les courbes représentatives des fonction ch et sh sont :



Cosinus hyperbolique :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}'(x)$	$-$	0	$+$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

Sinus hyperbolique :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$		$+$	
sh	$-\infty$	0	$+\infty$

⇒ **Exemple 8 :** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$7\text{ch } x + 2\text{sh } x = 9.$$

⇒ **Exemple 9 :** Etudier la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \text{th} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}. \end{aligned}$$

VI Fonctions circulaires réciproques

6.1 Définitions

La fonction $\cos$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$.
Elle est donc bijective de $[0, \pi]$ vers $[\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$.

Définition 5

La fonction $\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
On appelle arc cosinus et on note $\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ sa bijection réciproque.
On a :

$$\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1], (\cos x = y \iff x = \text{Arccos}(y)).$$

La fonction $\sin$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Elle est donc bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$.

Définition 6

La fonction $\sin$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
On appelle arc sinus et on note $\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sa bijection réciproque. On a :

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \forall y \in [-1, 1], (\sin x = y \iff x = \text{Arcsin}(y)).$$

La fonction $\tan$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Elle est donc bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $]\lim_{-\frac{\pi}{2}^+} \tan, \lim_{\frac{\pi}{2}^-} \tan[= \mathbb{R}$.

Définition 7

La fonction $\tan$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

On appelle arc tangente et on note $\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sa bijection réciproque. On a :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \forall y \in \mathbb{R}, (\tan x = y \iff x = \text{Arctan}(y)).$$

Formule 10 : Quelques valeurs

$\text{Arccos}(1) = 0$	$\text{Arcsin}(0) = 0$	$\text{Arctan}(0) = 0$
$\text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$	$\text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$	$\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$
$\text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$	$\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$	$\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$
$\text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$	$\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$	$\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
$\text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$	$\text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$

6.2 Etude des fonctions**Proposition 22**

$\text{Arccos} \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$ et $\text{Arcsin} \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$

$\text{Arccos} \in \mathcal{C}^\infty(]-1, 1[)$, $\text{Arcsin} \in \mathcal{C}^\infty(]-1, 1[)$ et $\text{Arctan} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$$\forall x \in]-1, 1[\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Preuve.

- On admet (pour l'instant) que Arccos et Arcsin sont continues sur $]-1, 1[$.
- $\cos :]0, \pi[\rightarrow]-1, 1[$ est dérivable et : $\forall x \in]0, \pi[, \cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$.
Donc, par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$.
Soit $x \in]-1, 1[$. On a $\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sin(\text{Arccos } x)}$.
D'autre part, $\cos^2(\text{Arccos } x) + \sin^2(\text{Arccos } x) = 1$, donc $\sin^2(\text{Arccos } x) = 1 - x^2$ puis $\sin(\text{Arccos } x) = \pm \sqrt{1-x^2}$.
Comme $\text{Arccos } x \in]0, \pi[$, on a $\sin(\text{Arccos } x) \geq 0$ et donc $\sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1-x^2}$.
Finalement, on obtient que $\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Comme $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, alors Arccos est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
- $\sin :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]-1, 1[$ est dérivable et : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \sin'(x) = \cos(x) \neq 0$.
Donc, par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$.
Soit $x \in]-1, 1[$. On a $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin } x)}$.
D'autre part, $\cos^2(\text{Arcsin } x) + \sin^2(\text{Arcsin } x) = 1$, donc $\cos^2(\text{Arcsin } x) = 1 - x^2$ puis $\cos(\text{Arcsin } x) = \pm \sqrt{1-x^2}$.
Comme $\text{Arcsin } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(\text{Arcsin } x) \geq 0$ et donc $\cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1-x^2}$.
Finalement, on obtient que $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, alors Arcsin est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
- $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2 \neq 0$.
Donc, par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan } x)} = \frac{1}{1+x^2}$.
- Comme $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors Arctan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

□

Corollaire 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Soit $u : I \rightarrow]-1, 1[$ dérivable alors :

$$\forall x \in I, (\text{Arccos} \circ u)'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}, \quad (\text{Arcsin} \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

- Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable alors :

$$\forall x \in I, (\text{Arctan} \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

Corollaire 4

- Arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.
- Arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$.
- Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 23

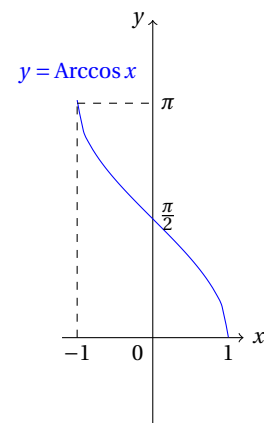
Arcsin et Arctan sont impaires.

Preuve.

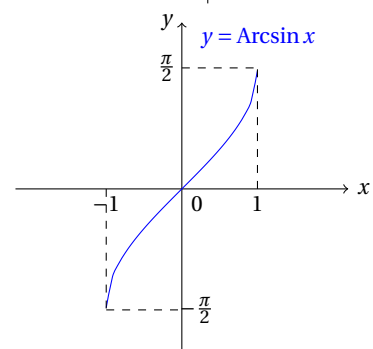
- Soit $y \in [-1, 1]$. Posons $x = \text{Arcsin}(y)$. On a $\sin(x) = y$ et $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
On a $\text{Arcsin}(-y) = \text{Arcsin}(-\sin(x)) = \text{Arcsin}(\sin(-x))$ (car $\sin$ est impaire). De plus, $-x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\text{Arcsin}(-y) = -x$.
Finalement, $\text{Arcsin}(-y) = -x = -\text{Arcsin}(y)$. Ainsi, Arcsin est impaire.
- Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = \text{Arctan}(y)$. On a $\tan(x) = y$ et $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
On a $\text{Arctan}(-y) = \text{Arctan}(-\tan(x)) = \text{Arctan}(\tan(-x))$ (car $\tan$ est impaire). De plus, $-x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\text{Arctan}(-y) = -x$.
Finalement, $\text{Arctan}(-y) = -x = -\text{Arctan}(y)$. Ainsi, Arctan est impaire.

□

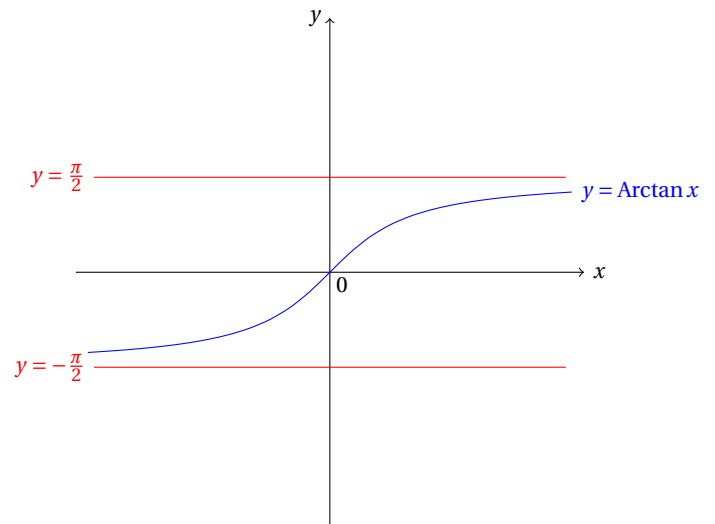
x	-1	0	1
Arccos	π	$\frac{\pi}{2}$	0



x	-1	0	1
Arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



6.3 Applications

Méthode 1

Pour montrer une **formule** faisant apparaître des fonctions trigonométriques réciproques, on doit :

- donner le domaine de définition de la formule,
- introduire une fonction f telle que la formule revienne à montrer que cette fonction est nulle,
- étudier le domaine de dérivabilité de f et montrer que f' est nulle,
- en déduire que f est constante sur chaque intervalle de son domaine de dérivabilité et, si besoin, utiliser un argument de continuité pour montrer que f est constante sur chaque intervalle de son domaine de définition,
- prendre une ou des valeurs pour montrer que la ou les constantes sont nulles.

⇨ **Exemple 10** : Montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1], \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

⇨ **Exemple 11** : Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi}{2}$$

où $\operatorname{sgn}(x)$ est le signe de x .

Proposition 24

Soit $x \in [-1, 1]$,

$$\cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x, \quad \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{si } x \neq 0, \tan(\operatorname{Arccos}(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}, \quad \sin(\operatorname{Arcsin}(x)) = x, \quad \text{si } |x| \neq 1, \tan(\operatorname{Arcsin}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \tan(\operatorname{Arctan}(x)) = x$$

Preuve. Les formules pour Arccos et Arcsin ont été prouvées dans la proposition 22.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $\frac{1}{\cos^2(\operatorname{Arctan} x)} = 1 + \tan^2(\operatorname{Arctan} x) = 1 + x^2$.

De plus, comme $\operatorname{Arctan} x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors $\cos(\operatorname{Arctan} x) > 0$ donc :

$$\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ainsi :

$$\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \cos(\operatorname{Arctan}(x)) \cdot \tan(\operatorname{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

□

⇒ **Exemple 12 :** Représenter la fonction :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x) \end{aligned}$$

Méthode 2

Pour **résoudre une équation** (E) faisant apparaître des fonctions trigonométriques réciproques, on doit :

- donner le domaine de définition de l'équation (E) ,
- raisonner par analyse-synthèse,
- dans l'analyse :
 - appliquer une fonction trigonométrique bien choisie à l'équation (E) pour en déduire une équation (E') ,
 - raisonner par équivalences pour résoudre (E') ,
 - conclure l'analyse,
- dans la synthèse :
 - considérer les solutions obtenues à la fin de l'analyse,
 - remonter les équivalences pour en déduire qu'elles vérifient (E') ,
 - étudier des appartenances à des ensembles bien choisis pour vérifier si on peut ou non "enlever" les fonctions trigonométriques introduites dans l'analyse et ainsi vérifier (E) .

⇒ **Exemple 13 :** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arcsin} \frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{5}{13} = \operatorname{Arcsin} x.$$

⇒ **Exemple 14 :** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \sqrt{1 - x^2} = \frac{\pi}{2}.$$