

Chapitre 5 : Inégalités

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

Les résultats qui suivent découlent de la construction de l'ensemble des nombres réels. Cette construction n'étant pas au programme, on admettra les résultats suivants. Il s'agit des propriétés basiques et bien connues des inégalités, mais elles sont écrites dans un langage formel.

Proposition 1

$\mathbb{R}$ est muni d'une relation de comparaison $\leq$ qui est dite relation d'ordre total, c'est à dire qu'elle possède les propriétés suivantes :

- réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$,
- antisymétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$,
- transitivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.
- L'ordre est total c'est à dire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ ou $y \leq x$.

Proposition 2 : Opérations sur les inégalités

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

- | | | |
|---|---|--|
| • $x \leq y \iff x + z \leq y + z$, | • si $z > 0$, | • $0 < x \iff 0 < \frac{1}{x}$, |
| • $\begin{cases} x \leq y \\ z \leq t \end{cases} \Rightarrow x + z \leq y + t$, | • $x \leq y \iff xz \leq yz$, | • $0 < x \leq y \iff 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$, |
| • $x < y \iff x + z < y + z$, | • si $z \geq 0$, | • $0 < x < y \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$, |
| • $\begin{cases} x < y \\ z < t \end{cases} \Rightarrow x + z < y + t$, | • $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$, | • $x < 0 \iff \frac{1}{x} < 0$, |
| • $\begin{cases} x \leq y \\ z < t \end{cases} \Rightarrow x + z < y + t$, | • $\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq t \end{cases} \Rightarrow xz \leq yt$, | • $x \leq y < 0 \iff \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$, |
| • $x \leq y \iff -y \leq -x$, | • si $z > 0$, | • $x < y < 0 \iff \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$. |
| • $x < y \iff -y < -x$, | • $x < y \iff xz < yz$, | |
| | • si $z \geq 0$, | |
| | • $x < y \Rightarrow xz \leq yz$, | |
| | • $\begin{cases} 0 < x < y \\ 0 < z < t \end{cases} \Rightarrow xz < yt$, | |

Remarque : Autrement dit : on peut additionner des inégalités, multiplier des inégalités entre des nombres positifs et passer aux quotient dans des inégalités entre des nombres de **même signe** en changeant le sens des inégalités.

Méthode 1

- Pour soustraire deux inégalités, on procède en deux étapes : on multiplie la bonne inégalité par -1 puis on ajoute les inégalités.
- Pour faire un produit d'inégalités, on se ramène au cas où les nombres sont tous positifs, quitte à multiplier par -1 en étape intermédiaire.
- Pour faire un quotient d'inégalités, on procède en deux étapes : on inverse la bonne inégalité (en faisant attention aux signes!) puis on multiplie les inégalités.

⇨ **Exemple 1 :** Soient $a, b, c, d, e, f, x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leq x \leq b, d \leq y \leq c < 0$ et $0 < e \leq z \leq f$. Encadrer :

- $x - y$:
- xy :
- $\frac{x - y}{z}$:

⇨ **Exemple 2 :** Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x + 1)^3(x - 1) > (x + 1)^4.$$

II Valeur absolue

Définition 1

On appelle valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ le réel, noté $|x|$ et défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque :

- La valeur absolue est définie par une disjonction de cas. Dans une définition par disjonction de cas, il faut bien que les cas soient disjoints. On a donc choisi de mettre le cas $x = 0$ dans le cas positif mais on aurait pu faire le choix du cas négatif.
- On peut définir la valeur absolue sans disjonction de cas en utilisant le maximum (noté $\max$) de deux nombres :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \max(x, -x).$$

En effet :

- si $x \geq 0$, alors $x \geq -x$ donc $\max(x, -x) = x = |x|$,
- si $x < 0$, alors $-x \geq x$ donc $\max(x, -x) = -x = |x|$.

Proposition 3

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

- $|x| \geq 0$,
- $|x| = 0 \iff x = 0$,
- $|-x| = |x|$,
- $|x - y| = |y - x|$,
- $-|x| \leq x \leq |x|$,
- $|x| = |y| \iff x = \pm y$,
- soit $a \in \mathbb{R}^+$, $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.

Preuve.

- On raisonne par disjonction de cas.
 - Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \geq 0$.
 - Si $x < 0$, alors $|x| = -x \geq 0$.Dans tous les cas : $|x| \geq 0$.
- On raisonne par double implication.
 - Supposons $x = 0$. On a $|x| = 0$. Ainsi : $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$.
 - Supposons $|x| = 0$, alors :
 - * si $x \geq 0$, on a : $x = |x| = 0$,
 - * si $x < 0$, alors $x = -|x| = 0$ ce qui est impossible.On a donc : $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$.
Donc : $|x| = 0 \iff x = 0$.
- On raisonne par disjonction de cas.
 - Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et $-x \leq 0$ donc $|-x| = -(-x) = x$. Donc : $|-x| = |x|$.
 - Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et $-x > 0$ donc $|-x| = -x$. Donc : $|-x| = |x|$.Dans tous les cas : $|-x| = |x|$.
- D'après le point précédent appliqué à $x - y$, on a : $|x - y| = |-(x - y)| = |y - x|$.
- On raisonne par disjonction de cas.
 - Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \geq 0$ et $-x \leq 0$ donc $-|x| \leq 0 \leq x = |x|$, ainsi : $-|x| \leq x \leq |x|$.
 - Si $x < 0$, alors $|x| = -x > 0$ donc $-|x| = x < 0 \leq |x|$, ainsi : $-|x| \leq x \leq |x|$.Dans tous les cas : $-|x| \leq x \leq |x|$.
- On raisonne par double implication.
 - Supposons $x = \pm y$.
 - * Si $x = y$, alors $|x| = |y|$.
 - * Si $x = -y$, alors $|x| = |-y| = |y|$.
 - Supposons $|x| = |y|$.
 - * Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a $|x| = x$ et $|y| = y$ donc $x = y$.
 - * Si $x \geq 0$ et $y < 0$, on a $|x| = x$ et $|y| = -y$ donc $x = -y$.
 - * Si $x < 0$ et $y \geq 0$, on a $|x| = -x$ et $|y| = y$ donc $-x = y$ ainsi $x = -y$.
 - * Si $x < 0$ et $y < 0$, on a $|x| = -x$ et $|y| = -y$ donc $-x = -y$ ainsi $x = y$.Dans tous les cas : $x = \pm y$.
On a donc : $|x| = |y| \iff x = \pm y$.

Donc : $|x| = |y| \iff x = \pm y$.

- Si $x \geq 0$, comme $x \geq 0 \geq -a$, on a : $|x| \leq a \iff x \leq a \iff -a \leq x \leq a$.
- Si $x < 0$, comme $x < 0 \leq a$, on a : $|x| \leq a \iff -x \leq a \iff -a \leq x \iff -a \leq x \leq a$.
- Dans tous les cas :

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

□

Proposition 4

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

- $|xy| = |x| \cdot |y|$,
- $|x^n| = |x|^n$,
- si $y \neq 0$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Preuve.

- On raisonne par disjonction de cas :
 - Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \geq 0$ donc $|xy| = xy = |x| \cdot |y|$,
 - Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \geq 0$ donc $|xy| = xy = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$,
 - Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \leq 0$ donc $|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$,

Dans tous les cas : $|xy| = |x| \cdot |y|$.

- Pour $n = 0$, $|x^n| = 1 = |x|^n$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|x^n| = |x|^n$.

$$\begin{aligned} |x^{n+1}| &= |x^n \cdot x| = |x^n| \cdot |x| \text{ d'après le premier point} \\ &= |x|^n \cdot |x| \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= |x|^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, |x^n| = |x|^n$,

- Supposons $y \neq 0$. En appliquant le premier point à $\frac{x}{y}$ et y , on a : $\left| \frac{x}{y} \cdot y \right| = \left| \frac{x}{y} \right| \cdot |y|$ donc $|x| = \left| \frac{x}{y} \right| \cdot |y|$.

$$\text{Ainsi : } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

□

Proposition 5

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|.$$

Remarque : La relation $\sqrt{x^2} = x$, n'est vraie que pour $x \geq 0$.

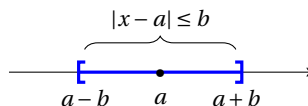
Proposition 6

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$, soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $|x - a| \leq b \iff -b \leq x - a \leq b \iff a - b \leq x \leq a + b$.
- $|x - a| \geq b \iff x - a \geq b \text{ ou } x - a \leq -b \iff x \leq a - b \text{ ou } x \geq a + b$.

Remarque :

- La valeur absolue d'un réel représente sa distance à 0. Si a et x sont deux réels, $|x - a|$ est la distance de a à x . Si $b \geq 0$, l'inégalité $|x - a| \leq b$ signifie que x est à une distance de a inférieure ou égale à b .



- Ces propriétés sont encore vraies en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.
- En particulier, dans le cas $a = 0$, on a : $|x| \leq b \iff -b \leq x \leq b$.

⇒ **Exemple 3 :** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$|1 - x| \leq 2|x| - 3.$$

⇒ **Exemple 4 :** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$|(x - 1)(x + 2)| \leq 2.$$

Proposition 7 : Inégalités triangulaires

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire) ;
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (deuxième inégalité triangulaire).

Preuve.

□

Proposition 8

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$2|ab| \leq a^2 + b^2.$$

Preuve.

□

III Majorations, minoration

3.1 Parties majorées, minorées, bornées

Définition 2

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A ssi : $\forall x \in A, x \leq M$.
- $m \in \mathbb{R}$ un minorant de A ssi : $\forall x \in A, x \geq m$.
- A est majorée ssi A admet un majorant, c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$$

- A est minorée ssi A admet un minorant, c'est-à-dire :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \geq m$$

- A est bornée ssi A est majorée et minorée, c'est-à-dire :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x \leq M$$

Remarque : En cas d'existence, il n'y a pas d'unicité du majorant. Par exemple, les majorants de $A = [0, 1[$ sont tous les éléments de $[1, +\infty[$.

Proposition 9

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in A, |x| \leq M$$

Preuve.

□

Définition 3

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est le maximum de A ou le plus grand élément de A ssi :

$$M \in A \text{ et } \forall x \in A, x \leq M.$$

Un tel élément est unique, et est noté $M = \max(A)$.

- Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est le minimum de A ou le plus petit élément de A ssi :

$$m \in A \text{ et } \forall x \in A, x \geq m.$$

Un tel élément est unique, et est noté $m = \min(A)$.

Remarque :

- Une partie majorée n'admet pas toujours de maximum. Par exemple, $[0, 1[$ est majorée mais n'admet pas de maximum.
- Une partie finie admet toujours un maximum et un minimum.

3.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 4

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est :

- majorée (sur $\mathcal{D}$) ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq M.$$

Un tel M est appelé majorant de f sur $\mathcal{D}$.

- minorée (sur $\mathcal{D}$) ssi :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq m.$$

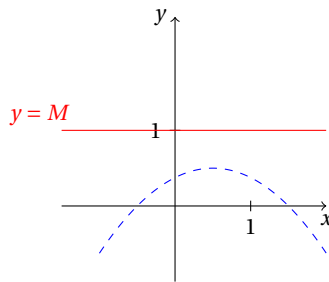
Un tel m est appelé minorant de f sur $\mathcal{D}$.

- bornée (sur $\mathcal{D}$) ssi f est majorée et minorée, c'est-à-dire :

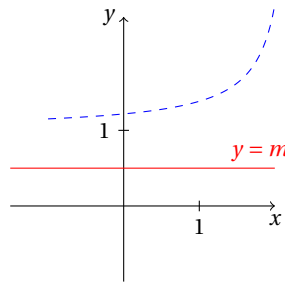
$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, m \leq f(x) \leq M.$$

Remarque :

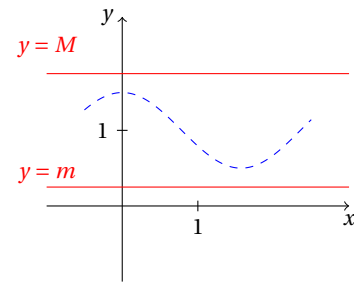
- L'ordre des quantificateurs est très important. Il faut bien placer le " $\exists M$ " avant le " $\forall x$ " afin que M ne dépende pas de x .
- Ces propriétés se traduisent géométriquement par des courbes représentatives qui sont en dessous ou au dessus de droites horizontales.



Fonction majorée



Fonction minorée



Fonction bornée

Proposition 10 : Caractérisation des fonctions bornées

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathcal{D}, |f(x)| \leq M.$$

Remarque : Ce résultat est analogue à celui vu sur les parties bornées. Il dit qu'une fonction f est bornée ssi $|f|$ est majorée.

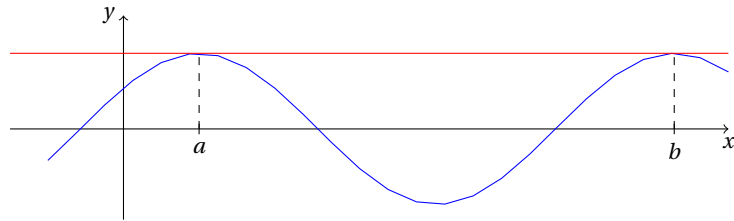
Définition 5

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que :

- f admet un maximum en a ssi : $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le maximum de f en a , on le note $\max_{\mathcal{D}} f$ ou $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.
- f admet un minimum en a ssi : $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le minimum de f en a , on le note $\min_{\mathcal{D}} f$ ou $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

Remarque :

- Contrairement au majorant, le maximum est toujours atteint.
- Une fonction peut avoir ni maximum, ni minimum, ou bien encore le maximum s'il existe peut être atteint en plusieurs points.



La fonction admet un maximum aux points a et b .

3.3 Suites minorées, majorées, bornées

Définition 6

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- majorée ssi : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée ssi : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- bornée ssi : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$

Proposition 11 : Caractérisation des suites bornées

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

⇔ **Exemple 5 :** On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{(-1)^n + u_n}{2}.$$

Montrons que (u_n) est bornée.

IV Partie entière

Définition 7

Soit $x \in \mathbb{R}$ On appelle partie entière de x , et on note $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}.$$

Proposition 12

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{R}$.

$$n = \lfloor x \rfloor \iff n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \leq x < n + 1.$$

On a donc :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Preuve.

□

Proposition 13

Soit $x \in \mathbb{R}$,

- $x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Preuve.

□

Proposition 14

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor.$$

Preuve.

□

⇔ **Exemple 6 :** Montrer que :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n.$$

⇔ **Exemple 7 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 3x - 2 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor.$$

⇔ **Exemple 8 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - n \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \end{array}$$
. Montrer que f est périodique. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) < n.$$