

Chapitre 6 : Calcul algébrique

I Sommes

1.1 Définitions

Définition 1

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

On définit par récurrence la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$. On note alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

On note également, pour tout $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $N_1 \leq N_2$:

$$S_{N_2} - S_{N_1-1} = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k.$$

Remarque :

- Ces définitions sont cohérentes avec l'idée intuitive de la sommation :

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_2-1} + a_{N_2}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1-2} + a_{N_1-1}) = a_{N_1} + a_{N_1+1} + \cdots + a_{N_2-1} + a_{N_2}.$$

- La notation avec des points de suspension n'est pas assez rigoureuse pour être utilisée dans des raisonnements, elle peut être seulement utilisée dans des brouillons.
- La quantité $\sum_{k=1}^n a_k$ ne dépend que de n et pas de k . On dit que l'indice de sommation k est muet. Il peut ainsi être remplacé par un autre indice non utilisé. Par exemple :

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=1}^n a_j.$$

⇔ **Exemple 1 :** Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n a_k = 2n$.

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{k=1}^j a_k$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{j=1}^n a_j$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{j=1}^{2n} a_j$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{j=n}^{2n} a_j$.

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I = \{i_k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ (les i_k sont 2 à 2 distincts) un ensemble fini à n éléments et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels indexée par I , on pose : $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=1}^n a_{i_k}$.

Si $I = \emptyset$, on pose par convention $\sum_{i \in I} a_i = 0$.

Remarque :

- Avec cette définition, toutes les sommes indexées par un ensemble fini se ramènent à des sommes indexées par un intervalle d'entiers.
- Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_k = \sum_{k=1}^n a_k.$$

- Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit I_n l'ensemble des nombres pairs inférieurs ou égaux à $2n$, on a :

$$\sum_{i \in I_n} a_i = \sum_{k=1}^n a_{2k}.$$

1.2 Opérations sur les sommes**Proposition 1**

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k.$$

Remarque : On dit que la sommation est linéaire.

Preuve.

- Pour $n = 0$, $\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = 0 = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k$.

Alors : $\sum_{k=1}^{n+1} (\lambda a_k + \mu b_k) = \sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k) + \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}.$

Donc, par hypothèse de récurrence $\sum_{k=1}^{n+1} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \mu \sum_{k=1}^n b_k + \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}.$

Ainsi : $\sum_{k=1}^{n+1} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n+1} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n+1} b_k.$

- On a donc prouvé le résultat par récurrence. □

Corollaire 1

Soit I un ensemble fini, soient $(a_k)_{k \in I}, (b_k)_{k \in I}$ deux familles de nombres réels, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k \in I} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k \in I} a_k + \mu \sum_{k \in I} b_k.$$

Proposition 2

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels, Soient $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}^*$ tels que $N_1 \leq N_2 \leq N_3$. On a :

$$\sum_{k=N_1}^{N_3} a_k = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k + \sum_{k=N_2+1}^{N_3} a_k.$$

En particulier :

$$\sum_{k=N_1}^{N_3} a_k = a_{N_1} + \sum_{k=N_1+1}^{N_3} a_k.$$

$$\sum_{k=N_1}^{N_3} a_k = \sum_{k=N_1}^{N_3-1} a_k + a_{N_3}.$$

Preuve. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. On a : $\sum_{k=N_1}^{N_3} a_k = S_{N_3} - S_{N_1-1} = S_{N_3} - S_{N_2} + S_{N_2} - S_{N_1-1} = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k + \sum_{k=N_2+1}^{N_3} a_k$. □

Remarque : On parle de découpage ou de regroupement de termes.

Corollaire 2

Soit I un ensemble fini non vide. Si I est la réunion de deux sous-ensembles disjoints I_1 et I_2 , alors :

$$\sum_{k \in I} a_k = \sum_{k \in I_1 \cup I_2} a_k = \sum_{k \in I_1} a_k + \sum_{k \in I_2} a_k$$

Remarque : Ce résultat peut être utilisé pour regrouper (ou découper) selon la parité.

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Soit $n \in \mathbb{N}$.

En regroupant les termes pairs et les termes impairs, on a :

$$\sum_{k=0}^n a_{2k} + \sum_{k=0}^n a_{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k.$$

1.3 Changement d'indice

Proposition 3

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- Soit $d \in \mathbb{Z}$ tel que $p + d \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{j=p+d}^{q+d} a_{j-d}.$$

On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j = k + d$.

- Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d - q \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{j=d-q}^{d-p} a_{d-j}.$$

On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j = d - k$.

Remarque :

- Dans une somme, si la borne inférieure est strictement plus grande que la borne supérieure, alors la somme est nulle, il faut donc bien penser à mettre les bornes dans le "bon sens".
- Seuls ces deux types de changement d'indices sont autorisés. On ne peut, en particulier, pas faire de changement d'indice de la forme $j = 2k$. Lorsqu'on est tenté de le faire, il faut plutôt penser à un découpage ou à un regroupement.

⇒ **Exemple 2 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3$.

1.4 Sommes usuelles

Proposition 4

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Preuve. On raisonne par récurrence.

- Pour $n = 0$, on a : $\sum_{k=0}^0 k = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^n k \right) + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)}{2}(n+2)$$

- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

□

Proposition 5

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Preuve. On raisonne par récurrence.

- Pour $n = 0$, on a : $\sum_{k=0}^0 k^2 = 0$ et $\frac{0(0+1)(2 \cdot 0+1)}{6} = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=0}^n k^2 \right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

□

Remarque : Dans la preuve, on a utilisé la valeur donnée dans l'énoncé. La méthode pour trouver et prouver la valeur de la somme est basée sur la remarque suivante : on a $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{j=0}^n (j+1)^3$, par changement d'indice en posant $j = k - 1$. Ainsi, comme l'indice de sommation est muet :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^n (k+1)^3.$$

Proposition 6 : Somme d'une progression géométrique

Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 \leq N_2$. Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors :

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} q^k = \frac{q^{N_1} - q^{N_2+1}}{1 - q}.$$

Preuve. On raisonne par récurrence pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

- Pour $n = 0$, on a : $\sum_{k=0}^0 q^k = 1 = \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

En effectuant le changement de variable $j = k - N_1$, on a : $\sum_{k=N_1}^{N_2} q^k = \sum_{j=0}^{N_2-N_1} q^{j+N_1} = q^{N_1} \frac{1 - q^{N_2-N_1+1}}{1 - q} = \frac{q^{N_1} - q^{N_2+1}}{1 - q}$. □

Proposition 7

Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 \leq N_2$. Alors :

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} 1 = N_2 - N_1 + 1.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n 1 = n$ et $\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

Preuve. On raisonne par récurrence pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

- Pour $n = 0$, on a : $\sum_{k=0}^0 1 = 1 = n + 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} 1 = \left(\sum_{k=0}^n 1 \right) + 1 = (n + 1) + 1 = n + 2$$

- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

En effectuant le changement de variable $j = k - N_1$, on a : $\sum_{k=N_1}^{N_2} 1 = \sum_{j=0}^{N_2-N_1} 1 = N_2 - N_1 + 1$. □

⇔ **Exemple 3 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme :

$$S_n = 1 \times n + 2 \times (n - 1) + \dots + n \times 1.$$

⇨ **Exemple 4 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^3.$$

1.5 Sommes télescopiques

Proposition 8 : Sommes télescopiques

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, on a : $\sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p$.

Ce type de somme est appelé somme télescopique.

Remarque : On parle de somme télescopique car les termes s'éliminent deux à deux et il ne reste que le premier et le dernier terme :

$$\sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k) = (\cancel{a_{p+1}} - a_p) + (\cancel{a_{p+2}} - \cancel{a_{p+1}}) + (\cancel{a_{p+3}} - \cancel{a_{p+2}}) + \dots + (\cancel{a_q} - \cancel{a_{q-1}}) + (a_{q+1} - \cancel{a_q}).$$

On peut adapter le résultat sur les sommes télescopiques à d'autres situations, par exemple :

$$\sum_{k=p}^q (a_{k-1} - a_k) =$$

Preuve. On a :

$$\sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=p}^q a_{k+1} - \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{l=p+1}^{q+1} a_l - \sum_{k=p}^q a_k = \left(\sum_{k=p+1}^q a_k \right) + a_{q+1} - a_p - \left(\sum_{k=p+1}^q a_k \right) = a_{q+1} - a_p$$

□

⇨ **Exemple 5 :** Soit $r \in \mathbb{R}$, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. Retrouver la formule donnant le terme général de (u_n) en utilisant une somme télescopique.

1.6 Factorisation

Proposition 9 : Factorisation de $a^n - b^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Preuve.

□

⇨ **Exemple 6 :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$6|(7^n - 1) \text{ et } 7|(3^{2n} - 2^n).$$

1.7 Inégalités

Proposition 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \leq y_k \implies \sum_{k=1}^n x_k \leq \sum_{k=1}^n y_k.$$

Preuve. • Pour $n = 1$. Soient $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq y_1$.

Alors : $\sum_{k=1}^n x_k = x_1 \leq y_1 = \sum_{k=1}^n y_k$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que :

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}, (\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \leq y_k) \implies \sum_{k=1}^n x_k \leq \sum_{k=1}^n y_k.$$

Soient $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, y_1, \dots, y_n, y_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, x_k \leq y_k$.

Par hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^n x_k \leq \sum_{k=1}^n y_k$ et comme $x_{n+1} \leq y_{n+1}$, on a :

$$\sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \leq \sum_{k=1}^n y_k + y_{n+1}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} y_k.$$

• D'où la conclusion par récurrence. □

⇔ **Exemple 7 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que :

$$\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i \right\rfloor \geq \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{x_i}{\alpha} \right\rfloor.$$

Proposition 11 : Généralisation de l'inégalité triangulaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Preuve. • Pour $n = 1$. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$.

Alors : $\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| = |x_1| = \sum_{k=1}^n |x_k|.$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Soient $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$.

Par hypothèse de récurrence : $\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$ donc :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| + |x_{n+1}|.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| + |x_{n+1}|.$$

Donc :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|.$$

• D'où la conclusion par récurrence.

□

⇔ **Exemple 8 :** Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k)}{k2^k} \right| \leq 1.$$

II Produits

Les résultats sur les produits sont analogues à ceux vus sur les sommes.

2.1 Définitions

Définition 3

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

On définit par récurrence la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $P_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n \cdot a_{n+1}$. On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=1}^n a_k$.

On note également, pour tout $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $N_1 \leq N_2$, et $P_{N_1-1} \neq 0$, $\frac{P_{N_2}}{P_{N_1-1}} = \prod_{k=N_1}^{N_2} a_k$.

Remarque : Pour les sommes, l'initialisation est 0, alors que pour les produits l'initialisation est 1.

Définition 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I = \{i_k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ (les i_k sont 2 à 2 distincts) un ensemble fini à n éléments et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels indexée par I , on pose : $\prod_{i \in I} a_i = \prod_{k=1}^n a_{i_k}$.

Si $I = \emptyset$, on pose par convention $\prod_{i \in I} a_i = 1$.

⇨ **Exemple 9 :** Calculer : $\prod_{k=-1000}^{1000} k \ln(1 + |k|)$.

2.2 Opérations sur les produits

Proposition 12

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels, soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=1}^n (a_k^p \cdot b_k^q) = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^p \cdot \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^q.$$

Remarque : On peut donc "sortir" les puissances constantes d'un produit.

Corollaire 3

Soit I un ensemble fini, soient $(a_k)_{k \in I}, (b_k)_{k \in I}$ deux familles de nombres réels, soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$\prod_{k \in I} (a_k^p \cdot b_k^q) = \left(\prod_{k \in I} a_k \right)^p \cdot \left(\prod_{k \in I} b_k \right)^q.$$

Proposition 13

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels, Soient $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}^*$ tels que $N_1 \leq N_2 \leq N_3$. On a :

$$\prod_{k=N_1}^{N_3} a_k = \prod_{k=N_1}^{N_2} a_k \cdot \prod_{k=N_2+1}^{N_3} a_k.$$

En particulier :

$$\prod_{k=N_1}^{N_3} a_k = a_{N_1} \cdot \prod_{k=N_1+1}^{N_3} a_k.$$

$$\prod_{k=N_1}^{N_3} a_k = \left(\prod_{k=N_1}^{N_3-1} a_k \right) \cdot a_{N_3}.$$

Corollaire 4

Soit I un ensemble fini non vide. Si I est la réunion de deux sous-ensembles disjoints I_1 et I_2 , alors :

$$\prod_{k \in I} a_k = \prod_{k \in I_1 \cup I_2} a_k = \prod_{k \in I_1} a_k \cdot \prod_{k \in I_2} a_k$$

2.3 Changement d'indice**Proposition 14**

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de nombres réels.

- Soit $d \in \mathbb{Z}$ tel que $p + d \geq 0$, on a :

$$\prod_{k=p}^q a_k = \prod_{j=p+d}^{q+d} a_{j-d}.$$

On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j = k + d$.

- Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d - q \geq 0$, on a :

$$\prod_{k=p}^q a_k = \prod_{j=d-q}^{d-p} a_{d-j}.$$

On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j = d - k$.

2.4 Produits usuels**Définition 5**

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! = \prod_{k=1}^n k.$$

Remarque : Par convention, on a donc : $0! = 1$.

⇨ **Exemple 10 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}.$$

Proposition 15

Soit $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $N_1 \leq N_2$. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$\prod_{k=N_1}^{N_2} a = a^{N_2 - N_1 + 1}.$$

Remarque : On peut donc "sortir" les constantes multiplicatives d'un produit en les élevant à la puissance égale au nombre de termes du produit :

$$\prod_{k=N_1}^{N_2} (a \cdot a_k) = a^{N_2 - N_1 + 1} \prod_{k=N_1}^{N_2} a_k.$$

⇨ **Exemple 11 :** Soit $n \in \mathbb{N}$,

- Simplifier : $\prod_{k=1}^n (2k)$.

- Simplifier : $\prod_{k=1}^n (2k + 1)$.

2.5 Produits télescopiques

Proposition 16 : Produits télescopiques

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$ et $(a_k)_{k \in [p, q]}$ une famille de nombres réels non nuls, on a : $\prod_{k=p}^q \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p}$.

Ce type de produit est appelé produit télescopique.

⇒ **Exemple 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier : $\prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$.

III Sommes doubles

Définition 6

Soient Ω une partie finie de $\mathbb{N}^2$ et $(a_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$ une famille de nombres réels doublement indexée. On note $\sum_{(i,j) \in \Omega} a_{i,j}$ la somme des éléments de cette famille. On dit que cette somme est double.

Proposition 17

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]}$ une famille de nombres réels. Alors :

$$\sum_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)$$

On pourra encore noter : $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}$.

Remarque : Il s'agit d'une somme rectangulaire. Dans ce cas, on peut intervertir les signes de sommation.

	$j = 1$	$j = 2$	$\cdots$	$j = p$	
$i = 1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,p}$	$\sum_{j=1}^p a_{1,j}$
$i = 2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,p}$	$\sum_{j=1}^p a_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$i = n$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,p}$	$\sum_{j=1}^p a_{n,j}$
	$\sum_{i=1}^n a_{i,1}$	$\sum_{i=1}^n a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^n a_{i,p}$	$\sum_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]} a_{i,j}$

Proposition 18

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ une famille de nombres réels.

Alors :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$$

Remarque : Il s'agit d'une somme triangulaire. Dans ce cas, on peut intervertir les signes de sommation, mais en modifiant les bornes.

	$j = 1$	$j = 2$	$\cdots$	$j = n$	
$i = 1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\sum_{j=1}^n a_{1,j}$
$i = 2$		$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$	$\sum_{j=2}^n a_{2,j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$i = n$				$a_{n,n}$	$\sum_{j=n}^n a_{n,j}$
	$\sum_{i=1}^1 a_{i,1}$	$\sum_{i=1}^2 a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^n a_{i,n}$	$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$

Pour se rappeler de la valeur des bornes, on écrit :

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ i \leq j \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq i \leq j \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

⇨ **Exemple 13 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j+1}$.

⇨ **Exemple 14 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes :

$$S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) \text{ et } T_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j).$$

⇨ **Exemple 15 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \min(i, j)$.

IV Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

4.1 Coefficients binomiaux

Définition 7

Soient $k, n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\binom{n}{k}$ est appelé coefficient binomial et se lit « k parmi n ».

Proposition 19

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Preuve. $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(k)!} = \binom{n}{k}$

□

Proposition 20 : Triangle de Pascal

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Remarque : Cette formule permet de calculer de proche en proche les coefficients binomiaux en construisant le triangle de Pascal.

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$\dots$	$p-1$	p
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$\vdots$	$\vdots$						
$n-1$	1					$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$
n	1						$\binom{n}{p}$

Preuve.

□

Corollaire 5

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On a :

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Preuve.

□

4.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 1 : Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Remarque : En écrivant le triangle de Pascal : $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Preuve.

□

Corollaire 6

- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$

Preuve.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (-1+1)^n = 0.$

□

⇨ **Exemple 16 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{-k}.$

⇨ **Exemple 17 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n \binom{i}{j}.$

⇔ **Exemple 18 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

Méthode 1 :

Méthode 2 :

⇨ **Exemple 19 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k}$.