Chapitre 6 : Calcul algébrique

I Sommes

1.1 Définitions

Définition 1

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.
On définit par récurrence la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$. On note alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

On note également, pour tout $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $N_1 \leq N_2$:

$$S_{N_2} - S_{N_1-1} = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k.$$

Remarque :

- Ces définitions sont cohérentes avec l'idée intuitive de la sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_2-1} + a_{N_2}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1-2} + a_{N_1-1}) = a_{N_1} + a_{N_1+1} + \cdots + a_{N_2-1} + a_{N_2}.$$

- La notation avec des points de suspension n'est pas assez rigoureuse pour être utilisée dans des raisonnements, elle peut être seulement utilisée dans des brouillons.
- La quantité $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ne dépend que de n et pas de k. On dit que l'indice de sommation k est muet. Il peut ainsi être remplacé par un autre indice non utilisé. Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

➪ **Exemple 1 :** Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n$.

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{k=1}^{j} a_k$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{j=1}^{n} a_j$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{j=1}^{2n} a_j$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{j=n}^{2n} a_j$.

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I = \{i_k, k \in [\![1, n]\!]\}$ (les i_k sont 2 à 2 distincts) un ensemble fini à n éléments et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels indexée par I, on pose : $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i_k}$.
Si $I = \emptyset$, on pose par convention $\sum_{i\in I} a_i = 0$.

Remarque :

- Avec cette définition, toutes les sommes indexées par un ensemble fini se ramènent à des sommes indexées par un intervalle d'entiers.

- Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k\in[\![1,n]\!]} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

- Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Soit $n\in\mathbb{N}$, soit I_n l'ensemble des nombres pairs inférieurs ou égaux à $2n$, on a :

$$\sum_{i\in I_n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.$$

1.2 Opérations sur les sommes

Proposition 1

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k) = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_k + \mu\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Remarque : On dit que la sommation est linéaire.

Preuve.

• Pour $n=0$, $\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k) = 0 = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_k + \mu\sum_{k=1}^{n} b_k$.

• Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k) = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_k + \mu\sum_{k=1}^{n} b_k$.

Alors : $\sum_{k=1}^{n+1}(\lambda a_k+\mu b_k) = \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k) + \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}$.

Donc, par hypothèse de récurrence $\sum_{k=1}^{n+1}(\lambda a_k+\mu b_k) = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_k + \mu\sum_{k=1}^{n} b_k + \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}$.

Ainsi : $\sum_{k=1}^{n+1}(\lambda a_k+\mu b_k) = \lambda\sum_{k=1}^{n+1} a_k + \mu\sum_{k=1}^{n+1} b_k$.

• On a donc prouvé le résultat par récurrence.

□

Corollaire 1

Soit I un ensemble fini, soient $(a_k)_{k\in I}$, $(b_k)_{k\in I}$ deux familles de nombres réels, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k\in I}(\lambda a_k+\mu b_k) = \lambda\sum_{k\in I} a_k + \mu\sum_{k\in I} b_k.$$

Proposition 2

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels, Soient $N_1, N_2, N_3\in\mathbb{N}^*$ tels que $N_1\le N_2\le N_3$. On a :

$$\sum_{k=N_1}^{N_3} a_k = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k + \sum_{k=N_2+1}^{N_3} a_k.$$

En particulier :

$$\sum_{k=N_1}^{N_3} a_k = a_{N_1} + \sum_{k=N_1+1}^{N_3} a_k.$$

$$\sum_{k=N_1}^{N_3} a_k = \sum_{k=N_1}^{N_3-1} a_k + a_{N_3}.$$

Preuve. Posons : $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. On a : $\sum_{k=N_1}^{N_3} a_k = S_{N_3} - S_{N_1-1} = S_{N_3} - S_{N_2} + S_{N_2} - S_{N_1-1} = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k + \sum_{k=N_2+1}^{N_3} a_k.$. □

Remarque : On parle de découpage ou de regroupement de termes.

Corollaire 2

Soit I un ensemble fini non vide. Si I est la réunion de deux sous-ensembles disjoints I_1 et I_2, alors :

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I_1\cup I_2} a_k = \sum_{k\in I_1} a_k + \sum_{k\in I_2} a_k$$

Remarque : Ce résultat peut être utilisé pour regrouper (ou découper) selon la parité.
Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Soit $n\in\mathbb{N}$.
En regroupant les termes pairs et les termes impairs, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a_{2k} + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k.$$

1.3 Changement d'indice

Proposition 3

Soient $p, q\in\mathbb{N}$ tels que $p\leq q$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- Soit $d\in\mathbb{Z}$ tel que $p+d\geq 0$, on a :
$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{j=p+d}^{q+d} a_{j-d}.$$
On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j=k+d$.
- Soit $d\in\mathbb{N}$ tel que $d-q\geq 0$, on a :
$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{j=d-q}^{d-p} a_{d-j}.$$
On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j=d-k$.

Remarque :

- Dans une somme, si la borne inférieure est strictement plus grande que la borne supérieure, alors la somme est nulle, il faut donc bien penser à mettre les bornes dans le "bon sens".
- Seuls ces deux types de changement d'indices sont autorisés. On ne peut, en particulier, par faire de changement d'indice de la forme $j=2k$. Lorsqu'on est tenté de le faire, il faut plutôt penser à un découpage ou à un regroupement.

➪ **Exemple 2 :** Soit $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3$.

1.4 Sommes usuelles

Proposition 4

Soit $n\in\mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Preuve. On raisonne par récurrence.

- Pour $n=0$, on a : $\sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2}=0$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. On a :
$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)}{2}(n+2)$$
- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

□

Proposition 5

Soit $n\in\mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Preuve. On raisonne par récurrence.

- Pour $n=0$, on a : $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$ et $\dfrac{0(0+1)(2.0+1)}{2} = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

□

Remarque : Dans la preuve, on a utilisé la valeur donnée dans l'énoncé. La méthode pour trouver et prouver la valeur de la somme est basée sur la remarque suivante : on a $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{j=0}^{n} (j+1)^3$, par changement d'indice en posant $j = k-1$. Ainsi, comme l'indice de sommation est muet :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3.$$

Proposition 6 : Somme d'une progression géométrique

Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 \leq N_2$. Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors :

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} q^k = \frac{q^{N_1} - q^{N_2+1}}{1-q}.$$

Preuve. On raisonne par récurrence pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

- Pour $n=0$, on a : $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

En effectuant le changement de variable $j = k - N_1$, on a : $\sum_{k=N_1}^{N_2} q^k = \sum_{j=0}^{N_2-N_1} q^{j+N_1} = q^{N_1}\dfrac{1-q^{N_2-N_1+1}}{1-q} = \dfrac{q^{N_1}-q^{N_2+1}}{1-q}$. □

Proposition 7

Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 \leq N_2$. Alors :

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} 1 = N_2 - N_1 + 1.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

Preuve. On raisonne par récurrence pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

- Pour $n=0$, on a : $\sum_{k=0}^{n} 1 = 1 = n+1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} 1 = \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) + 1 = (n+1)+1 = n+2$$

- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

En effectuant le changement de variable $j = k - N_1$, on a : $\sum_{k=N_1}^{N_2} 1 = \sum_{j=0}^{N_2-N_1} 1 = N_2 - N_1 + 1$. □

➪ **Exemple 3 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme :

$$S_n = 1 \times n + 2 \times (n-1) + \cdots + n \times 1.$$

➪ **Exemple 4 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^3.$$

1.5 Sommes télescopiques

Proposition 8 : Sommes télescopiques

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, on a : $\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p$.

Ce type de somme est appelé somme télescopique.

Remarque : On parle de somme télescopique car les termes s'éliminent deux à deux et il ne reste que le premier et le dernier terme :

$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = (\cancel{a_{p+1}} - a_p) + (\cancel{a_{p+2}} - \cancel{a_{p+1}}) + (\cancel{a_{p+3}} - \cancel{a_{p+2}}) + \ldots (\cancel{a_q} - \cancel{a_{q-1}}) + (a_{q+1} - \cancel{a_q}).$$

On peut adapter le résultat sur les sommes télescopiques à d'autres situations, par exemple :

$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k-1} - a_k) =$$

Preuve. On a :

$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} a_k \underset{l=k+1}{=} \sum_{l=p+1}^{q+1} a_l - \sum_{k=p}^{q} a_k = \left(\sum_{k=p+1}^{q} a_k\right) + a_{q+1} - a_p - \left(\sum_{k=p+1}^{q} a_k\right) = a_{q+1} - a_p$$

□

➪ **Exemple 5 :** Soit $r \in \mathbb{R}$, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Retrouver la formule donnant le terme général de (u_n) en utilisant une somme télescopique.

1.6 Factorisation

Proposition 9 : Factorisation de $a^n - b^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 6 :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$6|(7^n - 1) \text{ et } 7|(3^{2n} - 2^n).$$

1.7 Inégalités

Proposition 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ x_k \leq y_k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

Preuve.

- Pour $n=1$. Soient $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq y_1$.
  Alors : $\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 \leq y_1 = \sum_{k=1}^{n} y_k$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que :

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}, \left(\forall k \in [\![1, n]\!], x_k \leq y_k\right) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

  Soient $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $\forall k \in [\![1, n+1]\!], x_k \leq y_k$.
  Par hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sum_{k=1}^{n} y_k$ et comme $x_{n+1} \leq y_{n+1}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} y_k + y_{n+1}.$$

  Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \leq \sum_{k=1} n+1.$$

- D'où la conclusion par récurrence.

$\square$

➪ **Exemple 7 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que :

$$\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rfloor \geq \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{x_i}{\alpha} \right\rfloor.$$

Proposition 11 : Généralisation de l'inégalité triangulaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Preuve.

- Pour $n=1$. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$.
  Alors : $\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| = |x_1| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que :

$$\forall x_1, \ldots, x_n, \in \mathbb{R}, \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

  Soient $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$.
  Par hypothèse de récurrence : $\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$donc :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}|.$$

  Or, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| + |x_{n+1}|.$$

  Donc :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|.$$

- D'où la conclusion par récurrence.

$\square$

➪ **Exemple 8 :** Montons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k 2^k} \right| \leq 1.$$

II Produits

Les résultats sur les produits sont analogues à ceux vus sur les sommes.

2.1 Définitions

Définition 3

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.
On définit par récurrence la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $P_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n.a_{n+1}$. On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

On note également, pour tout $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $N_1 \leq N_2$, et $P_{N_1-1} \neq 0$, $\dfrac{P_{N_2}}{P_{N_1-1}} = \prod_{k=N_1}^{N_2} a_k$.

Remarque : Pour les sommes, l'initialisation est 0, alors que pour les produits l'initialisation est 1.

Définition 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I = \{i_k, k \in [\![1,n]\!]\}$ (les i_k sont 2 à 2 distincts) un ensemble fini à n éléments et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels indexée par I, on pose : $\prod_{i\in I} a_i = \prod_{k=1}^{n} a_{i_k}$.
Si $I = \emptyset$, on pose par convention $\prod_{i\in I} a_i = 1$.

➪ **Exemple 9 :** Calculer : $\displaystyle\prod_{k=-1000}^{1000} k\ln(1+|k|)$.

2.2 Opérations sur les produits

Proposition 12

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels, soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=1}^{n} (a_k^p.b_k^q) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^p.\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^q.$$

Remarque : On peut donc "sortir" les puissances constantes d'un produit.

Corollaire 3

Soit I un ensemble fini, soient $(a_k)_{k\in I}$, $(b_k)_{k\in I}$ deux familles de nombres réels, soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$\prod_{k\in I} (a_k^p.b_k^q) = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)^p.\left(\prod_{k\in I} b_k\right)^q.$$

Proposition 13

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels, Soient N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}^*$ tels que $N_1 \leq N_2 \leq N_3$. On a :

$$\prod_{k=N_1}^{N_3} a_k = \prod_{k=N_1}^{N_2} a_k.\prod_{k=N_2+1}^{N_3} a_k.$$

En particulier :

$$\prod_{k=N_1}^{N_3} a_k = a_{N_1}.\prod_{k=N_1+1}^{N_3} a_k.$$

$$\prod_{k=N_1}^{N_3} a_k = \left(\prod_{k=N_1}^{N_3-1} a_k\right).a_{N_3}.$$

Corollaire 4

Soit I un ensemble fini non vide. Si I est la réunion de deux sous-ensembles disjoints I_1 et I_2, alors :

$$\prod_{k\in I} a_k = \prod_{k\in I_1\cup I_2} a_k = \prod_{k\in I_1} a_k . \prod_{k\in I_2} a_k$$

2.3 Changement d'indice

Proposition 14

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres réels.

- Soit $d \in \mathbb{Z}$ tel que $p + d \geq 0$, on a :

$$\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{j=p+d}^{q+d} a_{j-d}.$$

  On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j = k + d$.
- Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d - q \geq 0$, on a :

$$\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{j=d-q}^{d-p} a_{d-j}.$$

  On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j = d - k$.

2.4 Produits usuels

Définition 5

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Remarque : Par convention, on a donc : $0! = 1$.

➪ **Exemple 10 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$$

Proposition 15

Soit $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $N_1 \leq N_2$. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$\prod_{k=N_1}^{N_2} a = a^{N_2-N_1+1}.$$

Remarque : On peut donc "sortir" les constantes multiplicatives d'un produit en les élevant à la puissance égale au nombre de termes du produit :

$$\prod_{k=N_1}^{N_2} (a.a_k) = a^{N_2-N_1+1} \prod_{k=N_1}^{N_2} a_k.$$

➪ **Exemple 11 :** Soit $n \in \mathbb{N}$,

- Simplifier : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$.
- Simplifier : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$.

2.5 Produits télescopiques

Proposition 16 : Produits télescopiques

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$ et $(a_k)_{k\in[\![p,q]\!]}$ une famille de nombres réels non nuls, on a : $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p}$.

Ce type de produit est appelé produit télescopique.

➪ **Exemple 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$.

III Sommes doubles

Définition 6

Soient Ω une partie finie de $\mathbb{N}^2$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$ une famille de nombres réels doublement indexée.
On note $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\Omega} a_{i,j}$ la somme des éléments de cette famille. On dit que cette somme est double.

Proposition 17

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une famille de nombres réels. Alors :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

On pourra encore noter : $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} a_{i,j}$.

Remarque : Il s'agit d'une somme rectangulaire. Dans ce cas, on peut intervertir les signes de sommation.

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=p$	
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,p}$	$\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{1,j}$
$i=2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,p}$	$\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$i=n$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,p}$	$\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{n,j}$
	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,2}$	$\cdots$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,p}$	$\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$

Proposition 18

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ une famille de nombres réels.
Alors :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

Remarque : Il s'agit d'une somme triangulaire. Dans ce cas, on peut intervertir les signes de sommation, mais en modifiant les bornes.

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=n$	
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}$
$i=2$		$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$	$\displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{2,j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$i=n$				$a_{n,n}$	$\displaystyle\sum_{j=n}^{n} a_{n,j}$
	$\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_{i,1}$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_{i,2}$	$\cdots$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,n}$	$\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$

Pour se rappeler de la valeur des bornes, on écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} 1\leq i\leq n \\ i\leq j\leq n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1\leq i\leq j \\ 1\leq j\leq n \end{array}\right.$$

➪ **Exemple 13 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j+1}$.

➪ **Exemple 14 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes :

$$S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j) \text{ et } T_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(i+j).$$

➪ **Exemple 15 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\displaystyle\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}\min(i,j)$.

IV Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

4.1 Coefficients binomiaux

Définition 7

Soient $k, n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\binom{n}{k}$ est appelé coefficient binomial et se lit « k parmi n ».

Proposition 19

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Preuve. $\displaystyle\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(k)!} = \binom{n}{k}$

□

Proposition 20 : Triangle de Pascal

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Remarque : Cette formule permet de calculer de proche en proche les coefficient binomiaux en construisant le triangle de Pascal.

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$\ldots$	$p-1$	p
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$\vdots$	$\vdots$						
$n-1$	1					$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$
n	1						$\binom{n}{p}$

Preuve.

□

Corollaire 5

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On a :

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Preuve.

□

4.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 1 : Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Remarque : En écrivant le triangle de Pascal : $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Preuve.

□

Corollaire 6

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$.

Preuve.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (-1+1)^n = 0$.

□

➪ **Exemple 16 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k}$.

➪ **Exemple 17 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j}$.

➪ **Exemple 18 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

➪ **Exemple 19 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}$.