

Chapitre 7 : Nombres complexes

I Ensemble des nombres complexes

1.1 Partie réelle et partie imaginaire

La construction de l'ensemble des nombres complexes n'est pas exigible. On admettra donc le résultat suivant :

Définition-Proposition 1

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$:

- possédant un élément noté i tel que $i^2 = -1$,
- dont tout élément s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ avec x et y réels,
- muni d'une addition notée $+$ telle que : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on définit $z + z'$:

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

- muni d'une multiplication notée $\times$ ou $\cdot$ telle que : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on définit $z \times z'$ par :

$$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Remarque :

- Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x + i0$ et comme $x, 0 \in \mathbb{R}$, on a donc $x \in \mathbb{C}$. On a donc l'inclusion :

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

- Les nombres réels sont donc des nombres complexes. Dire qu'un nombre est complexe ne signifie donc pas qu'il ne soit pas réel.
- Les opérations définies sur les nombres complexes vérifient les règles connues pour les nombres réelles : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on a :

$$z + z' = x + iy + x' + iy' = (x + x') + i(y + y'),$$

$$z \times z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ix'y' + iyx' + i^2yy' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

⇒ **Exemple 1 :** Posons $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ et $z_3 = 4 - i$, calculer : $(z_1 + z_2)z_3$.

Définition 1

On appelle nombre imaginaire pur, tout nombre complexe de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$.
On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Définition 2

Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe une unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$. Cette écriture est appelée **écriture algébrique** ou **forme algébrique**.
De plus x est appelé **partie réelle** de z et notée $\operatorname{Re}(z)$, y est appelée **partie imaginaire** de z et notée $\operatorname{Im}(z)$.

Remarque : Les nombres réels sont les complexes de partie imaginaire nulle et les nombres imaginaires purs sont les complexes de partie réelle nulle.

Proposition 1

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2) \text{ et } \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2).$$

Preuve. Ce résultat découle directement de la définition. □

Corollaire 1

Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, on a :

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(z_k) \text{ et } \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(z_k).$$

Proposition 2

Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z) \text{ et } \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z).$$

Remarque : On peut "sortir" les nombres **réels** des parties réelles et imaginaires.

Preuve. On a :

$$\lambda z = \lambda(\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)) = \lambda \operatorname{Re}(z) + i \lambda \operatorname{Im}(z),$$

avec $\lambda \operatorname{Re}(z), \lambda \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ donc :

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z) \text{ et } \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z).$$

□

⇨ **Exemple 2 :** Posons $z_1 = -1 + 3i$ et $z_2 = 4 - i$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1^2 - 2z_2$.

1.2 Conjugaison

Définition 3

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z , et on note $\bar{z}$ le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Proposition 3

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $\overline{\bar{z}} = z$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.
- si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Preuve. Posons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Posons $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

- $\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib = a + i(-b) = a + i(-b) = \bar{z}$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} = a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{(a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$.
Or, $\bar{z}_1 \times \bar{z}_2 = (a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_2 b_1 + a_1 b_2) = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$.
- En raisonnant par récurrence sur n , on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.
- Si $z_2 \neq 0$ alors, $\bar{z}_2 \neq 0$. On a alors : $1 = z_2 \times \frac{1}{z_2} = \bar{z}_2 \times \frac{1}{z_2}$ d'où $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{\bar{z}_2}$.

$$\text{Puis, } \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \overline{z_1 \times \frac{1}{z_2}} = \bar{z}_1 \times \frac{1}{\bar{z}_2} = \bar{z}_1 \times \frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

□

⇨ **Exemple 3 :** Posons $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ et $z_3 = 4 + i$.

Calculer $\bar{z}_1^2 - 3z_2 + iz_3$.

Proposition 4

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$

Preuve. Posons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- On a $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$ et $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$. Donc $\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)}{2} = \operatorname{Re}(z)$.
- De même $\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)}{2i} = \operatorname{Im}(z)$
- $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff \frac{z - \bar{z}}{2i} = 0 \iff z - \bar{z} = 0 \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff \frac{z + \bar{z}}{2} = 0 \iff z + \bar{z} = 0 \iff z = -\bar{z}$

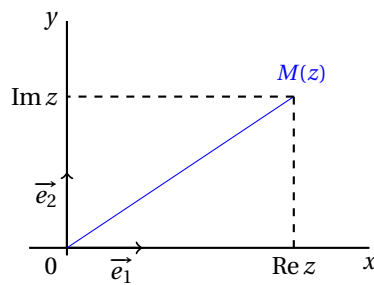
□

1.3 Affixe

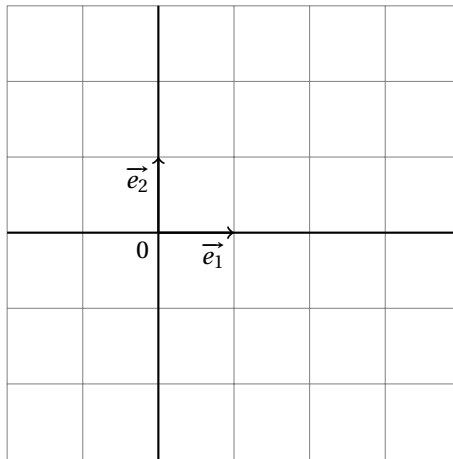
Définition 4

On munit le plan usuel $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

A tout point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) (resp. à tout vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$) avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ et réciproquement. On dit que z est l'**affixe** de M (resp. $\vec{u}$) et M (resp. $\vec{u}$) est appelé image de z . On note $M(z)$ (resp. $\vec{u}(z)$) pour exprimer que z est l'affixe de M (resp. $\vec{u}$).



⇔ **Exemple 4 :** On pose $z_1 = 2i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ et $z_4 = 3$. Représenter les vecteurs $\vec{u}_1$ (resp. $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$) d'affixes z_1 (resp. $z_2, z_3, z_4, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4$).



Remarque :

- L'axe des abscisses correspond aux nombres réels et l'axe des ordonnées aux nombres imaginaires purs.
- Comme le point de coordonnées $(x, -y)$ est le symétrique du point de coordonnées (x, y) par rapport à l'axe des abscisses, la conjugaison s'interprète comme la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

1.4 Calcul algébrique

Les formules suivantes, vues dans $\mathbb{R}$ restent vraies dans $\mathbb{C}$.

Proposition 5 : Somme d'une progression géométrique

Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 \leq N_2$. Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Alors :

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} q^k = \frac{q^{N_1} - q^{N_2+1}}{1 - q}.$$

Proposition 6 : Factorisation de $a^n - b^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Théorème 1 : Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

II Module

2.1 Définition et opérations

Définition 5

On appelle module du nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on note $|z|$ le réel positif (ou nul) défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque : La notion de module prolonge celle de valeur absolue, c'est à dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x + i0$ et le module de x vaut $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2}$ qui est égal à la valeur absolue de x .

Interprétation géométrique du module :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Si M est le point du plan $\mathcal{P}$ d'affixe z alors $|z| = ||\overrightarrow{OM}|| = OM$.

De même, si $\vec{u}$ est le vecteur du plan d'affixe z alors $|z| = ||\vec{u}||$

Si A et B sont deux points du plan d'affixes a et b alors $|b - a| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Cercles et disques :

Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- L'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z - \omega| = r$ est le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon r .
- L'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z - \omega| < r$ (resp. $|z - \omega| \leq r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre Ω d'affixe ω et de rayon r .

Le disque ouvert ne contient pas les points du cercle contrairement au disque fermé.

Proposition 7

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 = z\bar{z}$ et $|z| = |\bar{z}|$.

Preuve.

□

Méthode 1 : Calcul de la forme algébrique d'un quotient

On cherche à déterminer la forme algébrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$, avec $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$.

On multiplie et on divise la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z_2}}{z_2 \bar{z_2}} = \frac{z_1 \bar{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Comme $|z_2|^2$ est réel, il suffit de développer le numérateur pour obtenir la forme algébrique.

⇒ **Exemple 5 :** Posons $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2 + 3i$, calculer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.

⇒ **Exemple 6 :** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $Z = \frac{z+i}{iz+1} \in \mathbb{R}$.

Proposition 8

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z|^n = |z^n|$
- si $z_2 \neq 0$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Preuve. • $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2}$ par compatibilité de la conjugaison avec la multiplication.
Ainsi, $|z_1 z_2|^2 = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$. Or, $|z_1 z_2|, |z_1|$ et $|z_2|$ sont des réels positif d'où $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

• Par récurrence sur n .

- Si $z_2 \neq 0$ alors, on a : $1 = \left| z_2 \times \frac{1}{z_2} \right| = |z_2| \times \left| \frac{1}{z_2} \right|$. Comme $z_2 \neq 0$, on a $|z_2| \neq 0$ d'où $\left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|}$.

Enfin, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \times \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \times \left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

□

⇒ **Exemple 7 :** Posons $z_1 = \sqrt{3} + i$. Calculer le module de z_1^3 .

2.2 Propriétés

Proposition 9

$$\forall z \in \mathbb{C}, (|z| = 0 \iff z = 0).$$

Preuve. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\iff |z|^2 = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a^2 = 0 \text{ et } b^2 = 0 \text{ car } a^2, b^2 \geq 0 \\ &\iff a = 0 \text{ et } b = 0 \iff z = 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 10

$$\forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ et } |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

Preuve.

□

2.3 Inégalité triangulaire

Proposition 11 : Inégalité triangulaire

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

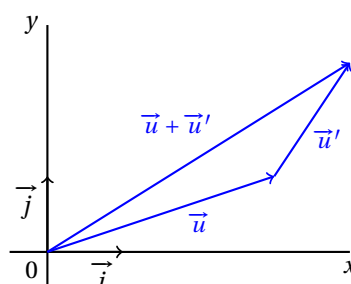
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

de plus $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.

Interprétation géométrique :

L'inégalité triangulaire peut donc s'interpréter de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ alors : $\|\vec{u} + \vec{u}'\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{u}'\|$.

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond au cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires de même sens.



Preuve.

□

Corollaire 2

Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Corollaire 3 : Deuxième inégalité triangulaire

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Preuve.

□

⇔ **Exemple 8 :** Montrer que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{C}, |1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c| \geq 1.$$

⇔ **Exemple 9 :** Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$:

$$\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

III Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

3.1 Cercle trigonométrique

Définition 6

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Remarque : $\mathbb{U}$ est représenté par le cercle trigonométrique.

Proposition 12

- $\forall z, z' \in \mathbb{U}, z.z' \in \mathbb{U}$
- $\forall z \in \mathbb{U}, z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \bar{z} \in \mathbb{U}$
- $\forall z \in \mathbb{U}, z \neq 0$
- $\forall z \in \mathbb{U}, \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Preuve. Soient $z, z' \in \mathbb{U}$. • $|z.z'| = |z|.|z'| = 1.1 = 1$ donc $z.z' \in \mathbb{U}$

• $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z}| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} \in \mathbb{U}$

• si $z = 0$ alors $|z| = 0$ donc $1 = 0$ ce qui est absurde. Ainsi $z \neq 0$.

• $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$ donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

De plus, $z.\bar{z} = |z|^2 = 1$ donc $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

□

Remarque : Si $z, z' \in \mathbb{U}$, en général, $z + z' \notin \mathbb{U}$. Par exemple : $z = 1 \in \mathbb{U}, z' = i \in \mathbb{U}$ et $z + z' = 1 + i \notin \mathbb{U}$.

Proposition 13 : Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par les fonctions circulaires

Un nombre complexe z est de module 1 si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Re}(z) = \cos(\theta)$ et $\operatorname{Im}(z) = \sin(\theta)$.
Ainsi :

$$\mathbb{U} = \{\cos(\theta) + i \sin(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C}, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)\}.$$

Preuve.

□

3.2 Exponentielle d'un nombre imaginaire pur

Définition 7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Proposition 14

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |e^{i\theta}| = 1.$$

Preuve. $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1.$ □

Proposition 15

L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto e^{i\theta}$ est 2π -périodique, c'est-à-dire :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}.$$

Preuve. $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques. □

Proposition 16

Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} e^{i\theta} e^{i\varphi} &= (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi + i(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) \\ &= \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) \\ &= e^{i(\theta+\varphi)}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

Preuve.

$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$. On en déduit que $e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^{i0} = 1$, donc $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$. □

3.3 Egalités d'exponentielles de nombres imaginaires purs

Proposition 17

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

Preuve.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} = 1 &\iff \cos(\theta) + i \sin(\theta) = 1 \\ &\iff \begin{cases} \cos(\theta) = 1 \\ \sin(\theta) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \theta \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases} \\ &\iff \theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ &\iff \theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

□

Corollaire 5

Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}$$

Preuve.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} = e^{i\varphi} &\iff e^{i(\theta-\varphi)} = 1 \\
&\iff \theta - \varphi \equiv 0 \pmod{2\pi} \\
&\iff \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}
\end{aligned}$$

□

⇒ **Exemple 10 :** Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2ix} = i \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

3.4 Formules d'Euler et de Moivre

Proposition 18 : Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \cos \theta, \\
\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \sin \theta.
\end{aligned}$$

□

Proposition 19 : Formule de Moivre

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ou encore par définition de $e^{i\theta}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Preuve.

- Raisonnons par récurrence $n \in \mathbb{N}$.
 - Pour $n = 0$ $(e^{i\theta})^0 = 1 = e^{i0}$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
 Alors $(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n e^{i\theta} = e^{in\theta} e^{i\theta}$ (par hypothèse de récurrence).

$$= e^{i(n+1)\theta}$$
 - On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
- Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On a $e^{in\theta} = \frac{1}{e^{-in\theta}} = \frac{1}{(e^{i\theta})^{-n}} = (e^{i\theta})^n$.

□

3.5 Factorisation par l'angle moitié

Méthode 2 : Factorisation par l'angle moitié

Lorsque l'on a une expression de la forme $e^{ia} \pm e^{ib}$, on met en facteur $e^{i\frac{a+b}{2}}$ puis on utilise la formule d'Euler. Cela est en particulier utile pour :

- simplifier des puissances
- déterminer les formules de factorisation de $\cos(a) \pm \cos(b)$ ou $\sin(a) \pm \sin(b)$ en prenant la partie réelle ou la partie imaginaire.

L'expression la plus fréquente est : $1 \pm e^{it}$.

⇨ **Exemple 11 :** Soient $t, a, b \in \mathbb{R}$. Factoriser :

1. $z_1 = 1 + e^{it}$
2. $z_2 = 1 - e^{it}$
3. $z_3 = \cos(a) + \cos(b)$
4. $z_4 = \sin(a) - \sin(b)$

⇨ **Exemple 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(kt).$$

3.6 Applications des formules de Moivre et d'Euler

Méthode 3 : Linéarisation

Pour linéariser une expression trigonométrique de la forme $\cos^k x \sin^l x$ (en combinaison linéaire de termes en $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$), on procède comme suit :

1. On utilise les formules d'Euler pour exprimer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix} .
2. On développe complètement les puissances.
3. On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$.

⇨ **Exemple 13 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x) \sin^2(x)$.

Remarque : La linéarisation permet de calculer des primitive de fonctions de la forme $x \mapsto \cos^k x \sin^l x$.

Méthode 4

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en $\cos$ (ou en $\sin$), on procède comme suit :

1. On écrit $\cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx}) = \operatorname{Re}((e^{ix})^n) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$ grâce à la formule de Moivre.
2. On développe la puissance.
3. On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

⇨ **Exemple 14 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$.

⇨ **Exemple 15 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x + ky).$$

IV Argument d'un nombre complexe non nul

4.1 Définitions

Proposition 20

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a : $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Preuve. On a $\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$ donc $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$. Ainsi : $z = |z|e^{i\theta}$. □

Définition 8 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée **forme trigonométrique** ou **forme exponentielle**.

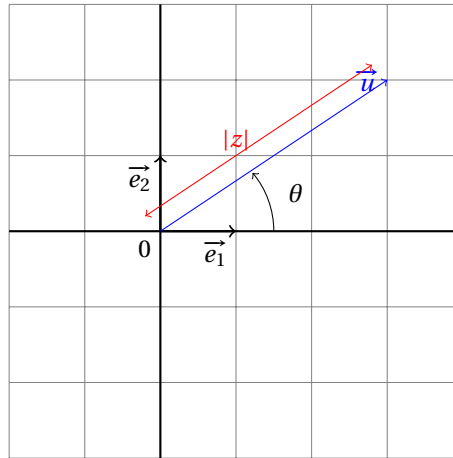
On dit que le réel θ est un argument de z .

Interprétation géométrique de l'argument :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de z .

Si M a pour affixe z , alors, θ représente une mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.

Si $\vec{u}$ a pour affixe z , alors, θ représente une mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \vec{u})$.



Proposition 21

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $z = r e^{i\theta}$.

Soient $\theta' \in \mathbb{R}$ et $r' \in \mathbb{R}_+^*$

$$z = r' e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r' = r \\ \theta' \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

Preuve.

□

Corollaire 6

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ soit θ un argument de z , soit $\theta' \in \mathbb{R}$. On a : θ' est un argument de z ssi $\theta' \equiv \theta \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire ssi $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta' = \theta + 2k\pi$.

Remarque : Si θ est un argument de z , alors $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont des arguments de z . Ainsi, tout nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments. On va choisir d'en privilégier un avec la définition suivante.

Définition 9

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument principal de z et on note $\text{Arg}(z)$ l'unique argument de z appartenant à $] -\pi, \pi]$.

Méthode 5

Pour déterminer la forme trigonométrique ou l'argument principal de $z \in \mathbb{C}^*$:

1. on calcule $|z|$,
2. on factorise z par $|z|$,
3. on cherche à reconnaître des valeurs connues de cos et sin.

⇔ **Exemple 16 :** Déterminer la forme trigonométrique de :

1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

Méthode 6 : Calcul de puissances

Pour calculer la puissance d'un nombre complexe : z^n avec $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on utilise la forme trigonométrique de z et la formule de Moivre. On a : $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ donc :

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Remarque : Même si θ est l'argument principal de z , cette méthode ne donne pas directement l'argument principal de z^n .

⇔ **Exemple 17 :** Déterminer l'argument principal de :

1. $z_1 = (1 + i)^{1000}$
2. $z_2 = (-1 - i\sqrt{3})^{500}$

4.2 Opérations sur les arguments

Proposition 22

Soient $z_1 \in \mathbb{C}^*$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$ d'arguments respectifs θ_1 et θ_2 . Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors

- $\overline{z_1}$ est non nul et $-\theta_1$ est un argument de $\overline{z_1}$.
- $z_1 z_2$ est non nul et $\theta_1 + \theta_2$ est un argument de $z_1 z_2$.
- $\frac{1}{z_2}$ est non nul et $-\theta_2$ est un argument de $\frac{1}{z_2}$.
- $\frac{z_1}{z_2}$ est non nul et $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
- z_1^n est non nul et $n\theta_1$ est un argument de z_1^n .
- $-z_1$ est non nul et $\theta_1 + \pi$ est un argument de $-z_1$.

Preuve. Comme θ_1 est un argument de z_1 , on a $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$. De même, $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$.

- $\overline{z_1} = |z_1|e^{-i\theta_1} = |\overline{z_1}|e^{-i\theta_1}$. Ainsi, $-\theta_1$ est un argument de $\overline{z_1}$.
- On a : $z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1} \times |z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} = |z_1 z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ ainsi $\theta_1 + \theta_2$ est un argument de $z_1 z_2$.
- On a $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{1}{|z_2|}e^{-i\theta_2} = \left|\frac{1}{z_2}\right|e^{-i\theta_2}$ ainsi $-\theta_2$ est un argument de $\frac{1}{z_2}$.
- Comme $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|e^{i(\theta_1-\theta_2)}$. Ainsi, $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
- $z_1^n = \left(|z_1|e^{i\theta_1}\right)^n = |z_1|^n \left(e^{i\theta_1}\right)^n = |z_1^n|e^{in\theta_1}$ ainsi $n\theta_1$ est un argument de z_1^n .
- $-z_1 = -|z_1|e^{i\theta_1} = |z_1|e^{i(\theta_1+\pi)} = |-z_1|e^{i(\theta_1+\pi)}$ ainsi $\theta_1 + \pi$ est un argument de $-z_1$.

□

4.3 Amplitude et phase

Méthode 7 : Amplitude et phase

On veut transformer une expression de la forme $a \cos t + b \sin t$, $(a, b) \neq (0, 0)$ en $A \cos(t - \varphi)$ où A désigne l'amplitude et φ la phase.

- On pose $z = a + ib$, comme $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que : $z = |z|e^{i\varphi}$. Donc :

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\varphi) \text{ et } b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\varphi).$$

- On a alors :

$$a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos t + \sin \varphi \sin t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi).$$

Donc $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ convient.

V Équations algébriques

5.1 Rappels

Proposition 23 : Résolution de l'équation du second degré à coefficients réels

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ à coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

On appelle discriminant de l'équation, le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$, appelée racine double et

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2.$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes, $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions non réelles distinctes, $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Preuve. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(z + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) \quad \text{car } a \neq 0 \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$, alors :

$$az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Ainsi l'équation admet une racine double $z_0 = -\frac{b}{2a}$ et $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$.

- Si $\Delta > 0$, alors :

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right) = a \left(z - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(z - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

Ainsi l'équation admet deux solutions réelles distinctes $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

- Si $\Delta < 0$, alors :

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right) = a \left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)$$

Ainsi l'équation admet deux solutions non réelles distinctes $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$. $\square$

5.2 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 10

On appelle racine carrée d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant $u^2 = z$.

Remarque :

- Si $z \neq 0$, z admet deux racines carrées opposées.
- Dans $\mathbb{R}^+$, les racines carrées sont réelles, on choisit d'appeler **la** racine carrée et de noter avec le symbole $\sqrt{\cdot}$ celle qui est positive. Mais, en dehors de $\mathbb{R}^+$, on ne peut pas parler de **la** racine carrée mais d'**une** racine carrée et on ne peut pas utiliser le symbole $\sqrt{\cdot}$.

Méthode 8 : Détermination des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- **Si on connaît la forme trigonométrique de z**

Si $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$, ses racines carrées sont $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

- **Sinon, on utilise la forme algébrique de z**

On note $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la forme cartésienne de z .

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x + iy)^2 = z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (\text{égalité des parties réelles}) \\ 2xy = b & (\text{égalité des parties imaginaires}) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (\text{égalité des modules}) \end{cases}$$

On peut alors calculer x^2 et y^2 puis en déduire x et y , les signes relatifs de x et y étant donnés par l'équation $2xy = b$.

$\Rightarrow$ **Exemple 18 :** Calculer les racines carrées de $\sqrt{3} + i$ et de $-5 + 12i$.

5.3 Résolution des équations du second degré

Proposition 24 : Résolution de l'équation du second degré

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ à coefficients $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.
On appelle discriminant de l'équation, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$, appelée racine double et

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2.$$

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes, $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ et

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Remarque : Les racines d'une équation du second degré à coefficients complexes ne sont, en général, pas conjuguées.

Preuve.

□

⇔ **Exemple 19 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0.$$

⇔ **Exemple 20 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + 2z + 1 - \sqrt{3} - i = 0.$$

Proposition 25 : Relations coefficients racines

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z_1, z_2 \text{ sont les solutions (éventuellement confondues) de l'équation } az^2 + bz + c = 0 \iff \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Preuve. - Supposons que z_1 et z_2 sont les solutions de $az^2 + bz + c = 0$.

Notons δ une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ (quitte à changer δ en $-\delta$).

Ainsi $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{(-b + \delta)(-b - \delta)}{4a^2} = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

- Réciproquement, supposons que $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vérifient $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a alors : $a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1 z_2 = az^2 + bz + c$. Ainsi, z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

□

5.4 Factorisation

Proposition 26

Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes :

$$\begin{aligned} P: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k, \end{aligned}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P , c'est-à-dire tel que $P(a) = 0$.

Alors, il existe une fonction polynomiale à coefficients complexes Q telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - a)Q(z).$$

Preuve.

□

⇔ **Exemple 21 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + (1 - i)z^2 + (-1 - 4i)z - 3 + i = 0.$$

On commencera par montrer que i est racine de cette équation.

5.5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Proposition 27

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$. On considère la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \quad (*)$$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$, les suites vérifiant (*) sont de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

- Si l'équation caractéristique admet une solution double $r \in \mathbb{K}$, les suites vérifiant (*) sont de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)r^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Preuve. La preuve est analogue à celle vue pour les suites réelles. □

Remarque : Les constantes sont dans l'ensemble qui correspond aux racines et pas aux coefficients.

⇔ **Exemple 22 :** On pose : $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_n$.

Déterminer le terme général de la suite (u_n) .

VI Racines n -ièmes

6.1 Racines n -ièmes de l'unité

Définition 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n -ième de l'unité tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Proposition 28

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}.$$

Preuve.

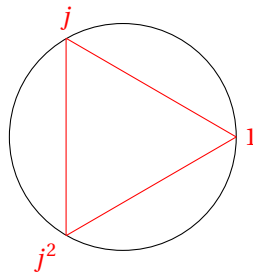
Soit $z \in \mathbb{U}_n$, alors $z^n = 1$ donc $|z|^n = 1$. Or $|z| \in \mathbb{R}^+$ donc $|z| = 1$. Ainsi $z \in \mathbb{U}$. □

Proposition 29

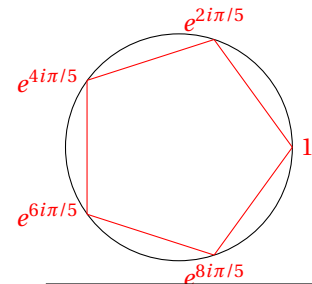
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble à n éléments :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

Remarque : Les points du plan complexe dont les affixes sont les racines n -ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.



Représentation de $\mathbb{U}_3$



Représentation de $\mathbb{U}_5$

Les points en question sont tous situés sur le cercle trigonométrique et l'angle au centre formé par deux points consécutifs sur le cercle vaut $\frac{2\pi}{n}$.

Preuve.

□

Proposition 30

Soit $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = 0.$$

Preuve.

□

⇒ **Exemple 23 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit des racines n -ièmes de l'unité.

6.2 Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Définition 12

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n -ième de a tout nombre complexe z vérifiant $z^n = a$.

Méthode 9 : Détermination de racines

Pour résoudre une équation du type $z^n = a$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, on doit déterminer la forme trigonométrique de a : $a = |a|e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ puis on écrit :

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff \frac{z^n}{a} = 1 \\ &\iff \left(\frac{z}{|a|^{1/n} e^{i\theta/n}} \right)^n = 1 \\ &\iff \frac{z}{|a|^{1/n} e^{i\theta/n}} \in \mathbb{U}_n \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{z}{|a|^{1/n} e^{i\theta/n}} = e^{2ik\pi/n} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z = |a|^{1/n} e^{i(\theta/n + 2ik\pi/n)} \end{aligned}$$

Remarque :

- Comme pour la racine carrée, on n'écrit pas le symbole $\sqrt[n]{}$.
- Un nombre complexe non nul admet n racines n -ièmes distinctes.

⇒ **Exemple 24 :** Déterminer les racines 5-ièmes de $-2 + 2i$.

⇒ **Exemple 25 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6 - 2iz^3 - 2 = 0.$$

⇒ **Exemple 26 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n + 1 = 0.$$

VII Exponentielle complexe

Définition 13

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle exponentielle de z et on note e^z ou $\exp(z)$ le nombre complexe défini par :

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}.$$

Proposition 31

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

- $|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re} z}$ et $\operatorname{Im} z$ est un argument de $\exp(z)$.
- $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$.
- $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$.
- $\exp(z) = \exp(z') \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z - z' = 2ik\pi$

Preuve. □

Méthode 10 : Equation exponentielle

Pour résoudre une équation du type $e^z = a$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, on doit déterminer la forme trigonométrique de a : $a = |a|e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ puis on écrit :

$$\begin{aligned} e^z = a &\iff e^z = |a|e^{i\theta} \\ &\iff e^z = e^{\ln|a| + i\theta} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln|a| + i\theta + 2ik\pi \end{aligned}$$

⇒ **Exemple 27** : Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $e^z = -1$
2. $e^z = 1 + i$
3. $e^z = 2$

VIII Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

8.1 Définition

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

Définition 14

On définit la partie réelle de f notée $\operatorname{Re}(f)$ et la partie imaginaire de f notée $\operatorname{Im}(f)$ par :

- $\operatorname{Re}(f) : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$
- $\operatorname{Im}(f) : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$

Remarque : Les propriétés de la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ se ramènent alors aux propriétés des fonctions $\operatorname{Re}(f) : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(f) : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 15

f est continue sur I si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

Définition 16

On dit que f est dérivable sur I si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables sur I . On appelle alors dérivée de f et on note f' la fonction définie par :

$$f' : I \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto (\operatorname{Re}(f))'(x) + i(\operatorname{Im}(f))'(x)$$

Remarque : On a ainsi : $\operatorname{Re}(f') = (\operatorname{Re}(f))'$ et $\operatorname{Im}(f') = (\operatorname{Im}(f))'$

Proposition 32 : Opérations sur les fonctions dérivables

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors $(\lambda f + \mu g), fg$ sont dérivables sur I . De plus, si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Remarque : Ces formules sont semblables à celle concernant les fonctions à valeurs réelles.

8.2 Exponentielle complexe**Proposition 33**

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I . Alors, la fonction $\exp \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, (\exp \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x) e^{\varphi(x)}$$

Preuve.

On pose $\varphi_1 = \operatorname{Re}(\varphi)$ et $\varphi_2 = \operatorname{Im}(\varphi)$.

Soit $t \in I$, $(\exp \circ \varphi)(t) = e^{\varphi(t)} = e^{\varphi_1(t) + i\varphi_2(t)} = e^{\varphi_1(t)} (\cos(\varphi_2(t)) + i \sin(\varphi_2(t)))$. $\exp \circ \varphi$ est dérivable sur I par compositions, produit et somme de fonctions dérivables sur I . Soit $t \in I$, en utilisant les formules de dérivation usuelles, on obtient :

$$\begin{aligned} (\exp \circ \varphi)'(t) &= \varphi_1'(t) \exp(\varphi_1(t)) \cdot (\cos(\varphi_2(t)) + i \sin(\varphi_2(t))) + \exp(\varphi_1(t)) \cdot (-\varphi_2'(t) \sin(\varphi_2(t)) + \varphi_2'(t) i \cos(\varphi_2(t))) \\ &= (\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t)) \exp(\varphi_1(t)) \cdot (\cos(\varphi_2(t)) + i \sin(\varphi_2(t))) = \varphi'(t) \exp(\varphi(t)). \end{aligned}$$

□

Corollaire 7

Soit $a \in \mathbb{C}$, la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable et sa dérivée est : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

⇨ **Exemple 28 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les dérivées n -ièmes de $\cos$ et $\sin$.

IX Interprétation géométrique des nombres complexes**9.1 Symétrie****Proposition 34**

L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ représente la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Preuve. Soit $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives $z = a + ib, z' = a' + ib'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. Notons $S : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ la symétrie par rapport à l'axe des abscisses et

On a :

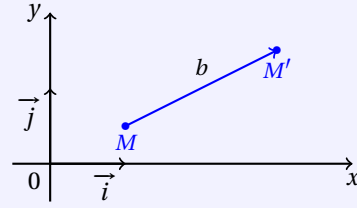
$$\begin{aligned} M' = S(M) &\iff \begin{cases} a' = a \\ b' = -b \end{cases} \\ &\iff a + ib = a' + ib' \\ &\iff z' = \bar{z} \\ &\iff z' = s(z) \end{aligned}$$

□

9.2 Translations

Proposition 35

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe $b \in \mathbb{C}$.
L'application $\begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + b \end{matrix}$ représente
la translation de vecteur $\vec{u}$.



Preuve. Soit $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives z, z' . Notons $T_{\vec{u}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et $t_b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto z + b$.

On a :

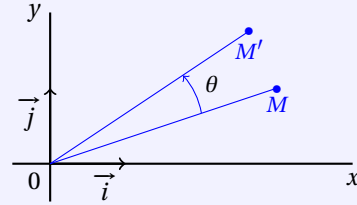
$$M' = T_{\vec{u}}(M) \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff z' - z = b \iff z' = z + b \iff z' = t_b(z)$$

□

9.3 Rotations et homothéties

Proposition 36

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
L'application $\begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta} z \end{matrix}$ représente
la rotation de centre O et d'angle θ .



Preuve. Soit $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives z, z' . Notons $R_\theta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ la rotation d'angle θ et $r_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto ze^{i\theta}$.

- Cas 1 : si $z \neq 0$ i.e $M \neq O$:

$$\begin{aligned} M' = R_\theta(M) &\iff \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \left|\frac{z'}{z}\right| = 1 \\ \text{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \frac{z'}{z} = e^{i\theta} \iff z' = ze^{i\theta} \iff z' = r_\theta(z) \end{aligned}$$

- Cas 2 : si $z = 0$ i.e $M = O$:

$$M' = R_\theta(M) \iff M' = M = O \iff z' = z = 0 \iff z' = r_\theta(z)$$

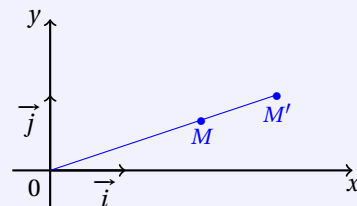
□

Définition 17

L'homothétie de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application du plan dans lui même qui, à tout point M , associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition 37

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
L'application $\begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda z \end{matrix}$ représente
l'homothétie de centre O et de rapport λ .



Preuve. Soit $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives z, z' .

Notons $H_\lambda : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ l'homothétie de centre O et de rapport λ et
$$h_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \lambda z$$
.

$$M' = H_\lambda(M) \iff \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \iff z' = \lambda z \iff z' = h_\lambda z$$

□

Corollaire 8

Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

L'application
$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto az$$
 représente la composée de l'homothétie de centre O et rapport $|a|$ avec la rotation de centre O et d'angle $\text{Arg}(a)$.

Ces applications sont appelées des similitudes directes.

Remarque : Ces applications sont appelées des similitudes directes.

9.4 Alignement et orthogonalité

Proposition 38

Soit $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs du plan non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2 . Une mesure de l'angle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est donnée par un argument de $\frac{z_2}{z_1}$.

Par suite :

- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.
- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$.

Preuve. On munit le plan usuel $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit θ_1 (resp. θ_2) un argument de z_1 (resp. z_2).

On a $\theta_1 \equiv (\vec{e}_1, \vec{u}_1)[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv (\vec{e}_1, \vec{u}_2)[2\pi]$. Or, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (\vec{e}_1, \vec{u}_2) - (\vec{e}_1, \vec{u}_1)$ donc $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \equiv \theta_2 - \theta_1[2\pi]$.

Ainsi, $\theta_2 - \theta_1$ qui est un argument de $\frac{z_2}{z_1}$ est une aussi mesure l'angle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

On a alors :

- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \equiv 0[\pi]$ si et seulement si $\theta_2 - \theta_1 \equiv 0[\pi]$ si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$
- De même, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si $\theta_2 - \theta_1 \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$

□

Corollaire 9

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts et d'affixes respectives z_A, z_B et z_C . Une mesure de l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est donnée par un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Par suite :

- A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

⇒ **Exemple 29 :** Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes $1, z$ et z^2 forment un triangle rectangle.