

Exemples du chapitre 7 :

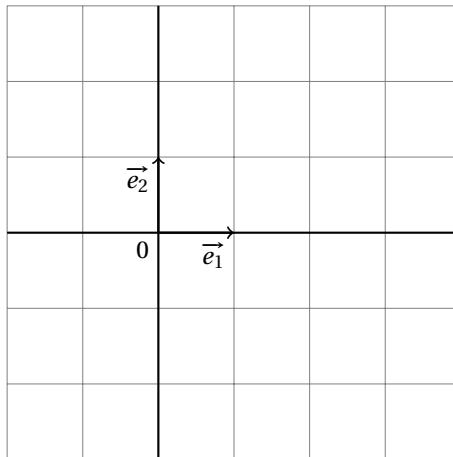
Nombres complexes

⇨ **Exemple 1 :** Posons $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ et $z_3 = 4 - i$, calculer : $(z_1 + z_2)z_3$.

⇨ **Exemple 2 :** Posons $z_1 = -1 + 3i$ et $z_2 = 4 - i$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1^2 - 2z_2$.

⇨ **Exemple 3 :** Posons $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ et $z_3 = 4 + i$.
Calculer $z_1^2 - 3z_2 + iz_3$.

⇨ **Exemple 4 :** On pose $z_1 = 2i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ et $z_4 = 3$. Représenter les vecteurs $\vec{u}_1$ (resp. $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$) d'affixes z_1 (resp. $z_2, z_3, z_4, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}, \overline{z_4}$).



⇨ **Exemple 5 :** Posons $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2 + 3i$, calculer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.

⇨ **Exemple 6 :** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $Z = \frac{z+i}{iz+1} \in \mathbb{R}$.

⇨ **Exemple 7 :** Posons $z_1 = \sqrt{3} + i$. Calculer le module de z_1^3 .

⇨ **Exemple 8 :** Montrer que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{C}, |1+a| + |a+b| + |b+c| + |c| \geq 1.$$

⇨ **Exemple 9 :** Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$:

$$\left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

⇨ **Exemple 10 :** Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2ix} = i \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

⇨ **Exemple 11 :** Soient $t, a, b \in \mathbb{R}$. Factoriser :

1. $z_1 = 1 + e^{it}$
 2. $z_2 = 1 - e^{it}$
 3. $z_3 = \cos(a) + \cos(b)$
 4. $z_4 = \sin(a) - \sin(b)$
-

⇨ **Exemple 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(kt).$$

⇨ **Exemple 13 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x) \sin^2(x)$.

⇨ **Exemple 14 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$.

⇨ **Exemple 15 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x + ky).$$

⇨ **Exemple 16 :** Déterminer la forme trigonométrique de :

1. $z_1 = 1 + i$
 2. $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$
-

⇨ **Exemple 17 :** Déterminer l'argument principal de :

1. $z_1 = (1 + i)^{1000}$
 2. $z_2 = (-1 - i\sqrt{3})^{500}$
-

⇨ **Exemple 18 :** Calculer les racines carrées de $\sqrt{3} + i$ et de $-5 + 12i$.

⇨ **Exemple 19 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0.$$

⇨ **Exemple 20 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + 2z + 1 - \sqrt{3} - i = 0.$$

⇨ **Exemple 21 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + (1 - i)z^2 + (-1 - 4i)z - 3 + i = 0.$$

On commencera par montrer que i est racine de cette équation.

⇨ **Exemple 22 :** On pose : $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_n$.

Déterminer le terme général de la suite (u_n) .

⇔ **Exemple 23 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit des racines n -ièmes de l'unité.

⇔ **Exemple 24 :** Déterminer les racines 5-ièmes de $-2 + 2i$.

⇔ **Exemple 25 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6 - 2iz^3 - 2 = 0.$$

⇔ **Exemple 26 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n + 1 = 0.$$

⇔ **Exemple 27 :** Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $e^z = -1$
 2. $e^z = 1 + i$
 3. $e^z = 2$
-

⇔ **Exemple 28 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les dérivées n -ièmes de $\cos$ et $\sin$.

⇔ **Exemple 29 :** Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.
