

# Exercices du chapitre 1 : Rudiments de logique, généralités et révisions sur les suites et les fonctions

## I Bases des mathématiques

### Exercice 1 : (★)

Déterminer les valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  pour lesquelles  $\frac{2n^2 - n - 6}{n + 3} \in \mathbb{Z}$ .

## II Quantificateurs

### Exercice 2 :

Examiner la vérité des propositions suivantes :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$ ,
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$ ,
3.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$ ,
4.  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$ ,
5.  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$ .

### Exercice 3 :

Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses? On justifiera les réponses.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^+, x^2 \leq x^4$ ,
2.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$ ,
3.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ ,
4.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ .

### Exercice 4 : (★)

Examiner la vérité de la proposition suivante, ainsi que celles que l'on peut obtenir en permutant les quantificateurs :

$$\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy.$$

### Exercice 5 :

Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , montrer que  $\frac{21n-3}{4}$  et  $\frac{15n-2}{4}$  ne sont pas simultanément dans  $\mathbb{Z}$ .

### Exercice 6 : (★)

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}.$$

## III Généralités sur les suites et les fonctions

### Exercice 7 :

Après avoir déterminé les ensembles de définition, étudier la parité des fonctions définies par :

$$1. f_1(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \quad 2. f_2(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \quad 3. f_3(x) = \frac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{(x-1)^2 - (x+1)^2}$$

### Exercice 8 :

Soient  $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

- a. Montrer que, si  $f$  est paire, alors  $g \circ f$  est paire.
- b. Montrer que si  $f$  est impaire et  $g$  est impaire, alors  $g \circ f$  est impaire.
- c. Montrer que si  $f$  est impaire et  $g$  est paire, alors  $g \circ f$  est paire.

## IV Logique

### Exercice 9 : (★)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ , montrer que :  $a^2 + ab + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$ .

### Exercice 10 : (★)

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que :  $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$ .

### Exercice 11 : (★)

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que :  $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ .

### Exercice 12 : (★)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montrer que :  $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$ .

### Exercice 13 : (★)

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Montrer que :  $x + y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow (x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q})$ .

**Exercice 14 : (★★)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , soient  $x_1, \dots, x_n, M \in \mathbb{R}$ . Montrer que :

$$x_1 + \dots + x_n > M \implies \max(x_1, \dots, x_n) > \frac{M}{n}.$$

**Exercice 15 : (★★)**

- (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n(n+1)$  est pair.  
(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , traduire en termes logiques la propriété : " $n$  est divisible par 8".

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On considère la propriété  $P$  suivante :

"si  $n^2 - 1$  n'est pas divisible par 8, alors l'entier  $n$  est pair".

- Ecrire la contraposée de  $P$ .
- Prouver, par un raisonnement direct, la contraposée de  $P$ .
- Que peut-on en déduire pour  $P$ ?

**Exercice 16 : (★★)**

Soit  $m \in \mathbb{R}$ , montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, mx + 1 \geq 0) \Leftrightarrow m = 0.$$

**V Monotonie****Exercice 17 : (★)**

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}.$$

- Montrer que  $(u_n)$  est majorée par 7.
- Montrer que  $(u_n)$  est croissante.

**Exercice 18 : (★★)**

Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une fonction strictement croissante. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x).$$

**Exercice 19 : (★★)**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f \circ f$  est croissante et  $f \circ f \circ f$  est strictement décroissante. Montrer que  $f$  est strictement décroissante.

**VI Systèmes linéaires****Exercice 20 :** 

Résoudre le système suivant d'inconnues  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases}$$

**Exercice 21 :** 

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système suivant d'inconnues  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases}$$

**Exercice 22 :** 

Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système suivant d'inconnues  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3 \end{cases}$$

**Exercice 23 : (★)**

Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système suivant d'inconnues  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} x + y + (2m-1)z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 3(m+1) \end{cases}$$

**Exercice 24 : (★)**

Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système suivant d'inconnues  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = 1 \end{cases}$$

**VII Principe de récurrence****Exercice 25 :** 

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - n. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + n + 1.$$

**Exercice 26 :** 

Montrer que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $3^{2n} - 2^n$  est divisible par 7.

**Exercice 27 :** 

Montrer que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $7^n - 1$  est divisible par 6.

**Exercice 28 :** (★★)

Montrer que :

1. pour tout  $n \geq 2$ ,  $2^{2^n} - 6$  est divisible par 10,
2. la somme des cubes de trois entiers consécutifs est divisible par 9.

## VIII Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques

**Exercice 29 :** (★)

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + 3u_n}.$$

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .

On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n}.$$

2. Montrer que  $(v_n)$  est arithmétique.
3. En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$  puis celle de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 30 :** (★)

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$ .

On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}.$$

2. Montrer que  $(v_n)$  est géométrique.
3. En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$  puis celle de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 31 :** 

Donner le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

**Exercice 32 :** 

Donner le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n + 4.$$

**Exercice 33 :** (★)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - n + 2.$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - n.$$

Etudier  $(v_n)$  et en déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

## IX Fonctions périodiques

**Exercice 34 :** (★)

Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $T_1, T_2 \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $f$  est périodique de période  $T_1$  et  $g$  est périodique de période  $T_2$ .

Montrer que  $f + g$  est périodique.

## X Autres principes de récurrence

**Exercice 35 :** 

On définit la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

**Exercice 36 :** 

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n(n-1).$$

**Exercice 37 : (★)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} + 1. \end{cases}$$

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

**Exercice 38 : (★★)**

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$  tel que  $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

**Exercice 39 : (★)**

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{n+1} (u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1.$$

**Exercice 40 : (★★)**

Soit  $(u_n)$  la suite vérifiant :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n.$$

**Exercice 41 : (★★★)**

Sans utiliser la décomposition en facteurs premiers, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p, q \in \mathbb{N}, n = 2^p(2q+1).$$

## XI Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Exercice 42 :** 

Donner le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 9 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

**Exercice 43 : (★)**

Calculer le terme général de la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n).$$

## XII Raisonement par analyse-synthèse

**Exercice 44 : (★)**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe une unique couple  $(g, h)$  de fonctions telles que :

$$f = g + h,$$

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = a,$$

$$\text{et } h(0) = 0.$$

**Exercice 45 : (★★)**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe une unique couple  $(g, h)$  de fonctions telles que :

$$f = g + h,$$

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax,$$

$$\text{et } h \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ telle que } \int_0^1 h = 0.$$

**Exercice 46 : (★★)** 

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :  $\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \circ g = g \circ f$ .

**Exercice 47 : (★★)**

Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \neq y \text{ et } x \neq z) \Rightarrow \left( \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \right).$$

Montrer que :

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b.$$

**Exercice 48 : (★★★)**

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}^{++}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f(f(x)) + f(x) = 2x.$$