

## I Cercle trigonométrique

### Exercice 1 : (★)

En remarquant que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ , déterminer les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

### Exercice 2 : (★)

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq \cos x + \sqrt{3} \sin x \leq 2.$$

### Exercice 3 : (★★)

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, |\sin(nx)| < n|\sin x|.$$

où  $\pi\mathbb{Z} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

## II Équations et inéquations trigonométriques

### Exercice 4 :

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sin(2x) + \sin(x) = 0.$$

### Exercice 5 : (★)

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$2 \cos^2(2x) - 3 \cos(2x) = -1.$$

### Exercice 6 : (★)

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\cos(3x) + \sin x = 0.$$

### Exercice 7 : (★★)

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\cos x - \cos 2x = \sin 3x.$$

### Exercice 8 :

Résoudre les inéquations suivante d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

1.  $\cos x > 0$ ,
2.  $\sin x \leq \frac{1}{2}$ ,

### Exercice 9 : (★)

Résoudre l'inéquation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 > 0.$$

## III Fonctions cosinus et sinus

### Exercice 10 : Etudier et tracer la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x \cdot \sin 2x - 2 \sin x \end{aligned}$$

### Exercice 11 : (★) Etudier et tracer la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2 \sin x + \sin(2x) \end{aligned}$$

### Exercice 12 : (★★) Etudier la fonction :

$$f: x \mapsto \sin^2 x - \sqrt{2} \cos x.$$

### Exercice 13 : (★★)

Soit la fonction :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-x}(\cos x + \sqrt{3} \sin x). \end{aligned}$$

1. Ecrire  $f$  sous la forme d'un produit d'une constante, d'une exponentielle et d'un cosinus.
2. Etudier les variations de  $f$ .

### Exercice 14 : (★★)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$\begin{aligned} f_n: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \cos^n(x). \end{aligned}$$

1. Montrer que la dérivée de la fonction  $f_n$  peut se mettre sous la forme :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f'_n(x) = \cos^{n-1}(x) g_n(x),$$

où  $g_n$  est une fonction dont on déterminera l'expression.

2. Etudier les variations de  $g_n$ .
3. Montrer que  $f_n$  admet un maximum.

## IV Tangente

### Exercice 15 : (★)

On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \tan(2x) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
2. Etudier la périodicité de  $f$ .
3. Etudier la parité de  $f$ .
4. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}$  et que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{2 + \cos^3(2x)}{\cos^2(2x)}.$$

5. Etudier et tracer  $f$ .

### Exercice 16 : (★★)

On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \sin(2x) - \frac{3}{4} \tan(x).$$

1. Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
2. Etudier la périodicité de  $f$ .
3. Etudier la parité de  $f$ .
4. Etudier et tracer  $f$ .

### Exercice 17 : (★★)

Combien l'équation suivante admet-elle de solutions dans  $[0, \pi]$  ?

$$\tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) = 0.$$

### Exercice 18 : (★★★)

Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto \tan^2(x) \sqrt{1 - \cos x}.$$

On étudiera la dérivabilité de  $f$  en 0.

## V Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

### Exercice 19 : (★)

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

### Exercice 20 : (★)

Etudier  $f : x \mapsto \operatorname{ch}(3x) - 3\operatorname{ch}(x)$ .

### Exercice 21 : (★★)

1. Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\operatorname{sh}(x) = 2.$$

2. Résoudre l'inéquation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\operatorname{sh}(x) \leq 2.$$

3. Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\operatorname{ch}(x) = 2.$$

4. Résoudre l'inéquation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\operatorname{ch}(x) \leq 2.$$

### Exercice 22 :

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montrer que :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b), \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b),$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b), \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b),$$

$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a, \operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{ch} a \operatorname{sh} a.$$

### Exercice 23 : (★★)

1. (a) Montrer que la fonction  $f$  suivante est bijective :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow [1, +\infty[ \\ x &\mapsto \operatorname{ch} x. \end{aligned}$$

On note  $\operatorname{argch}$  sa bijection réciproque.

- (b) Montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

2. (a) Montrer que la fonction  $\operatorname{sh}$  est bijective.

On note  $\operatorname{argsh}$  sa bijection réciproque.

- (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

## VI Fonctions circulaires réciproques

### Exercice 24 : (★)

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{Arctan}|x|.$$

### Exercice 25 : (★★)

Déterminer son ensemble de validité et montrer la formule :

$$2\operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

### Exercice 26 : (★★)

Déterminer son ensemble de validité et montrer la formule :

$$2\operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) + \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}$$

### Exercice 27 : (★★)

Montrer que :

$$\forall x \in ]-1, 1], \operatorname{Arcsin} \sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

### Exercice 28 : (★)

Etudier les variations des fonctions suivantes et tracer leur courbe représentative :

1.  $f_1(x) = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right)$ ,
2.  $f_2(x) = (x-1)^2 \operatorname{Arctan} x$ ,

### Exercice 29 : (★)

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \operatorname{Arctan} x > \frac{x}{1+x^2}.$$

### Exercice 30 : (★★)

On pose :

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .

2. Etudier la périodicité et la parité de  $f$ .

3. Soit  $x \in ]0, \pi[$ , exprimer  $\frac{1-\cos x}{\sin x}$  en fonction de  $\frac{x}{2}$ .

4. En déduire une expression simple de  $f(x)$  pour  $x \in ]0, \pi[$ .

5. Tracer  $f$  sur  $] -3\pi, 3\pi[$ .

6. Calculer  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ .

### Exercice 31 : (★)

Simplifier les expressions suivantes :

1.  $\cos(4\operatorname{Arctan} x)$ ,
2.  $\sin(3\operatorname{Arctan} x)$ .

### Exercice 32 : (★★)

Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  avec  $xy \neq 1$ , montrer que :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy} + k\pi,$$

où :

- $k = 0$  si  $xy < 1$ ,
- $k = 1$  si  $xy > 1$  et  $x > 0$ ,
- $k = -1$  si  $xy > 1$  et  $x < 0$ .

### Exercice 33 : (★★)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

1.  $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin} 2x$ ,
2.  $2\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$ .

### Exercice 34 : (★★)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

1.  $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 2x = \frac{\pi}{4}$ ,
2.  $\operatorname{Arcsin} 2x = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}x)$ .

### Exercice 35 : (★★)

Montrer la formule de Machin :

$$4\operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$