

Exercices du chapitre 5 : Inégalités

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 : (★)

Soient a et b deux réels non nuls, distincts et de même signe. Montrer que :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2.$$

Exercice 2 :

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x-4} - \sqrt{2x-3} < 0.$$

II Valeur absolue

Exercice 3 : (★)

Résoudre, dans $\mathbb{R}$,

$$|x^2 + 2x| \geq 3.$$

Exercice 4 : (★)

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

$$1. |2x-4| = |x-1| \qquad 2. \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \leq 2$$

Exercice 5 : (★)

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$|x+3| - |x-1| = |2x+1|.$$

Exercice 6 : (★★)

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+4-4\sqrt{x}} + \sqrt{x+9-6\sqrt{x}} = 1.$$

Exercice 7 : (★★)

Soient $x, m \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x \geq m \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \leq 1+2|m|+x.$$

Exercice 8 : (★★)

1. Montrer que si x et y sont deux réels positifs tels que $x \geq y$, alors :

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ et } \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

2. En déduire que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$$

$$\text{et } \left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

Exercice 9 : (★★)

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|,$$

$$1 + |xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|).$$

III Majorations, minoration

Exercice 10 :

Montrer que la fonction $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ n'est pas majorée.

IV Partie entière

Exercice 11 : Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor \sqrt{n^2 + 3n + 4} \right\rfloor = n + 1.$$

Exercice 12 : Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \right\rfloor = 2.$$

Exercice 13 : (★) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.$$

Exercice 14 : (★)

Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor.$$