Exercices du chapitre 7 : Nombres complexes

I Ensemble des nombres complexes

Exercice 1 :
Calculer les parties réelles et imaginaires de :

$$z_1 = (3+2i)^2(2-i) \text{ et } z_2 = \frac{(3+2i)(1+i)}{1-i}.$$

Exercice 2 :
Donner le conjugué de chaque nombre complexe :

$$z_1 = i(4-2i)^2, \quad z_2 = \frac{i\sqrt{3}}{1+6i}, \quad z_3 = \frac{z(1-i\bar{z})}{2z-4i\bar{z}}, \text{ où } z \in \mathbb{C}^*.$$

Exercice 3 :
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Calculer :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \text{ et } \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Exercice 4 : (⋆)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que :

$$z + \frac{1}{z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 5 :
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Calculer les parties réelles et imaginaires de :

$$Z = \frac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}}.$$

Exercice 6 : (⋆)
Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$2z + 6\bar{z} = 3 + 2i.$$

II Module

Exercice 7 :
Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que :

$$\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 8 : (⋆)
Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$.

1. Montrer que :
$$\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}.$$
2. Montrer que :
$$|ab+bc+ca| = |a+b+c|.$$

Exercice 9 : (⋆)
Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq |z|^2 + |z-1|.$$

Exercice 10 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|a_k| \leq 1$ et $|b_k| \leq 1$.
Montrer que :

$$\left| \prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$$

Exercice 11 : (⋆ ⋆ ⋆)
Soit $n \geq 2$ et soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.
Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ si et seulement si tous les z_k sont nuls, ou bien s'il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $z_{k_0} \neq 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, z_k est de la forme $\lambda_k z_{k_0}$, où $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$.

III Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Exercice 12 :
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 13 : ($\star$)
Soient $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha \not\equiv \pi \quad [2\pi]$. Montrer que $e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} \neq 0$ puis déterminer la partie réelle de :

$$z = \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\alpha} + e^{2i\alpha}}.$$

Exercice 14 : ($\star\star$)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin\theta$.
En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 15 : ($\star$)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que ($\theta \not\equiv \pi \bmod 2\pi$). On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que :

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

Exercice 16 : ($\star$)
Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donner la forme algébrique de :

$$\frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}.$$

Exercice 17 : ($\star\star$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :
1. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$,
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^k(x)\sin(kx)$.

IV Argument d'un nombre complexe non nul

Exercice 18 :
Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :
1. $(\sqrt{3} + i)^{2013}$,
2. $\left(\dfrac{9+i}{5-4i}\right)^4$,
3. $(1 + e^{i\theta})^n$ avec $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$,
4. $\dfrac{(1+i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$.

Exercice 19 :
Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la forme trigonométrique de :

$$z_1 = -\sin a + i\cos a,\ z_2 = \sin a + i\cos a,\ z_3 = -\cos a - i\sin a.$$

Exercice 20 :
On pose : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.
1. Déterminer la forme trigonométrique et la forme algébrique de z_3.
2. En déduire les valeurs de :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$

Exercice 21 :
Donner la forme trigonométrique de :

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}.$$

Exercice 22 :
Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (-1+i)(-1+i\sqrt{3}), \quad z_2 = -2i(2+2i),$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}, \quad z_4 = \frac{2\sqrt{3}-6i}{-i}.$$

Exercice 23 : ($\star$)
Déterminer la forme trigonométrique de :

$$z = \frac{1 + i + \sqrt{2}}{1 - i - \sqrt{2}}.$$

Exercice 24 :
Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\bar{z} = z^3.$$

Exercice 25 : ($\star$)
Déterminer la forme trigonométrique de $\sqrt{6} + i\sqrt{2}$.
En déduire les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$(\sqrt{6} + i\sqrt{2})^n \in \mathbb{R}.$$

Exercice 26 : ($\star\star$)
Soient $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer, lorsque c'est possible, le module et un argument de :

$$z = e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 27 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$(1+i)^{4n}.$$

En déduire les valeurs de :

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \begin{pmatrix} 4n \\ 2p \end{pmatrix} \text{ et } \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \begin{pmatrix} 4n \\ 2p+1 \end{pmatrix}.$$

V Équations algébriques

Exercice 28 :
Déterminer les racines carrées de $1+i$. En déduire la valeur de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Exercice 29 :
Déterminer les racines carrées de $1+6i$.

Exercice 30 :
Résoudre les équations suivantes :
1. $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$,
2. $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$.

Exercice 31 :
Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4 + iz^2 - (1-i) = 0.$$

Exercice 32 : (⋆)
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0.$$

Exercice 33 : (⋆)
Soit l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^3 - 2z^2 + 2(2-3i)z - 20 = 0$.
Montrer qu'elle a une racine $z_0 \in i\mathbb{R}$.
Calculer les deux autres racines z_1 et z_2.

Exercice 34 : (⋆⋆)
Calculer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

VI Racines n-ièmes

Exercice 35 :
Déterminer les racines sixièmes de :

$$\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}.$$

Exercice 36 : (⋆)
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0.$$

Exercice 37 : (⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$(z-1)^n = 1.$$

On donnera les résultats sous forme trigonométrique.

Exercice 38 : (⋆⋆)
Résoudre $4(z+i)^4 - (z+1)^4 = 0$. Donner les expressions algébriques des solutions.

Exercice 39 : (⋆)
Soient $z = \exp(\frac{2i\pi}{7})$ et $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.
1. Calculer $u + v$ et u^2.
2. En déduire $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

Exercice 40 : (⋆⋆)
1. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\left(\frac{2z+1}{z+1}\right)^4 = 1. \quad (E)$$

2. Montrer que les images des solutions de (E) appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 41 : (⋆⋆)
Soit $a \in \mathbb{R}$, déterminer les racines quatrièmes de :

$$z = 8a^2 - (1+a^2)^2 + 4ia(1-a^2).$$

Exercice 42 : (⋆⋆)
Montrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \frac{1}{2}.$$

VII Exponentielle complexe

Exercice 43 :
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $e^z = i$,
2. $e^z = 2$,
3. $e^z = 2i$,
4. $e^{2z} = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 44 : ($\star$)
Résoudre l' équation suivante dans $\mathbb{C}$:

$$e^{2z} + e^z + 1 = 0.$$

VIII Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Exercice 45 : ($\star\star$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : x \mapsto \cos(x)e^x.$$

Exercice 46 : ($\star\star$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les dérivées $n^{ièmes}$ de $\cos^3$ et $\sin^3$.

IX Interprétation géométrique des nombres complexes

Exercice 47 : ($\star$)
Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que z, z^2 et z^4 sont alignés.

Exercice 48 : ($\star\star$)
Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que : z, $\frac{1}{z}$, $-i$ sont alignés.

Exercice 49 : ($\star$)
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Calculer les module et argument du nombre complexe $a = \sqrt{3} - i$. Marquer son image A.
2. On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit f l'application qui, à l'affixe z de M, associe l'affixe z' de $M' = r(M)$. Exprimer $f(z)$ à l'aide de z.
3. Construire l'image B de A par la rotation r. Déterminer l'affixe b de B sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
4. Déduire des calculs précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.