Exercices du chapitre 8 : Primitives

I Calcul de primitives

Exercice 1 :
Déterminer une primitive de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{2x-3}{(x^2-3x+10)^4}$,
2. $f_2 : x \mapsto xe^{x^2}$,
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}$,
4. $f_4 : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$,
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$,
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{(\ln(3x+6))^3}{x+2}$,
7. $f_7 : x \mapsto \dfrac{2x-5}{(x^2-5x+9)^4}$.

Exercice 2 :
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 3 :
Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$f : x \mapsto \sin^3 x.$$

Exercice 4 : $(\star\star)$
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\},\ \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En déduire une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{\sin x} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{\cos x}.$$

Exercice 5 :
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto e^{2x}\cos(3x).$$

Exercice 6 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3x)\,dx$,
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos x \sin^2 x\,dx$,
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$,
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^3}\,dx$,
5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$,
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$.

Exercice 7 : $(\star)$

1. Calculer : $\displaystyle\int_1^{e} \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx$,
2. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\operatorname{Arcsin} x}{1-x^2}}\,dx$.

Exercice 8 :

a. Déterminer une primitive sur $]-2,+\infty[$ de :

$$x \mapsto \frac{\ln^3(2x+4)}{x+2}.$$

b. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}}.$$

Exercice 9 : $(\star)$

1. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\},\ \frac{2x^2-3x-4}{x-2} = ax+b+\frac{c}{x-2}.$$

2. En déduire la valeur de :
$$\int_0^1 \frac{2x^2-3x-4}{x-2}\,dx.$$

Exercice 10 : $(\star\star)$
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$ et : $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leq f'(x) \leq 1$. Montrer que :
$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \left(\int_0^x f\right)^2 \geq \int_0^x f^3.$$

II Intégration par parties et changement de variable

Exercice 11 :
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto \text{Arcsin}\, x$ sur $]-1,1[$
2. $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

Exercice 12 : $(\star)$
Calculer les intégrales suivantes :
1. $\displaystyle\int_0^1 t\text{Arctan}\,(t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^4(t)\,dt$

Exercice 13 : $(\star)$
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto \text{Arctan}\, x$,
2. $x \mapsto \sin(\ln x)$.

Exercice 14 :
Déterminer une primitive de :
$$x \mapsto (x^3+4x^2-2x+7)e^{2x}.$$

Exercice 15 : $(\star)$
Déterminer une primitive de :
$$x \mapsto x^3\cos x \text{ et } x \mapsto x^3 \sin x.$$

Exercice 16 : $(\star)$
Calculer les primitives des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto x^2\sin^3 x$
2. $x \mapsto (x^2-x+3)\sin x$
3. $x \mapsto (x^2+1)e^x\cos x$
4. $x \mapsto (x\,\text{sh}\, x)^2$

Exercice 17 : $(\star)$
On considère la suite (I_n) définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx.$$
Etablir une formule de récurrence.

Exercice 18 : $(\star\star)$
On considère la suite (I_n) définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx.$$
En utilisant la formule de récurrence établie dans l'exercice précédent, écrire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

Exercice 19 :
Calculer :
$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^{10}+1}\,dx.$$

Exercice 20 :
Déterminer une primitive de :
$$x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+e^x}.$$

Exercice 21 : $(\star)$
Calculer les primitives de :
1. $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$,
2. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$,
3. $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$,
4. $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$.

Exercice 22 : $(\star)$ Calculer une primitive de :
1. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, en effectuant le changement de variable $t=\sqrt{x^2-1}$,
2. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$, en effectuant le changement de variable $t=\sqrt{e^x-1}$.

Exercice 23 :
Soit $a>0$. Calculer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}.$$

Exercice 24 : (⋆)
Soit f définie par :

$$f(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1-t^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}\,dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = f(\frac{1}{x})$.
3. En déduire que f est identiquement nulle.

Exercice 25 : (⋆⋆) On pose :

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt. \end{array}$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, calculer $F(x)$ en effectuant le changement de variable $t = \mathrm{Arctan}(u)$.
3. En déduire la valeur de $F(\frac{\pi}{2})$.

Exercice 26 : (⋆⋆)
Déterminer une primitive sur $]-1,1[$ de :

$$x \mapsto (\mathrm{Arcsin}\, x)^2.$$

III Fractions rationnelles

Exercice 27 :
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}$$

Exercice 28 :
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{9x^2+6x+5}$$

Exercice 29 : (⋆)
Déterminer une primitive de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$,
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+1}$,
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Exercice 30 : (⋆⋆)
Calculer les primitives de :

$$x \mapsto \frac{x}{x^4-x^2-2}.$$

Exercice 31 : (⋆)
Calculer les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

a. $x \mapsto \dfrac{x^3+2x}{x^2+x+1}$

b. $x \mapsto \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$

c. $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-x+1}$

Exercice 32 : (⋆)
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{x}{x^2-x+1}.$$

Exercice 33 : (⋆⋆)
Montrer que :

$$\exists a,b,c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ \frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

En déduire les primitives de :

$$x \mapsto \frac{1}{x^3+1}.$$