

Indications du chapitre 1 : Rudiments de logique, généralités et révisions sur les suites et les fonctions

I Bases des mathématiques

Exercice 1 : (★)

Remarquer que $2n^2 - n - 6 = (n + 3)(2n - 7) + 15$.

Solution : $n \in \{0, 2, 12\}$

II Quantificateurs

Exercice 2 :

1. Exhiber un contre-exemple.

Solution : Faux

2. Exhiber un contre-exemple.

Solution : Faux

3. Reasonner par l'absurde.

Solution : Faux

4. Exhiber une valeur de x et de y qui convient.

Solution : Vrai

5. Pour y quelconque, exhiber une valeur de x qui convient.

Solution : Vrai

Exercice 3 :

1. Exhiber un contre-exemple.

Solution : Faux

2. Exhiber une valeur de x qui convient.

Solution : Vrai

3. Pour x quelconque, exhiber une valeur de y qui convient.

Solution : Vrai

4. Montrer la négation.

Solution : Faux

Exercice 4 : (★)

- On montre que $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est faux.
Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que : $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$.

En particulier, pour $y = \dots$ et $z = \dots$, on a $x = \dots$.

Recommencer en choisissant d'autres valeurs de y et z afin d'obtenir deux valeurs de x ce qui donne une contradiction.

- On montre que $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est faux.

Supposons que $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$.

Posons $y = \dots$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$.

Posons $z = \dots$, on a $x = \dots$.

Recommencer en choisissant une autre valeur de z afin d'obtenir deux valeurs de x ce qui donne une contradiction.

- On montre que $\forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est faux.

Supposons que $\forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$.

Posons $z = \dots$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$.

Posons $y = \dots$, on a $x = \dots$.

Recommencer en choisissant une autre valeur de y afin d'obtenir deux valeurs de x ce qui donne une contradiction.

- On montre que $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est vrai.

Soit $y \in \mathbb{R}^*$, soit $z \in \mathbb{R}^*$, posons $x = \dots$.

Vérifier que x convient.

Solution :

$\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$: faux

$\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$: faux

$\forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$: faux

$\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z = xy$: vrai

Exercice 5 :

Reasonner par l'absurde et sommer les deux nombres.

Exercice 6 : (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On raisonne par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{n^2 + 1} \in \mathbb{N}$. Posons $m = \sqrt{n^2 + 1}$.

Calculer $m^2 - n^2$ pour montrer que $(m - n)(m + n) = 1$.

Comme $m - n \in \mathbb{Z}$ et $m + n \in \mathbb{N}$, la seule solution possible est $m - n = m + n = 1$.

Résoudre ces équations, et arriver à la contradiction que m ou n n'est pas entier.

III Généralités sur les suites et les fonctions

Exercice 7 : (★)

1. *Solution* : f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et est impaire.
2. *Solution* : f est définie sur $]1, +\infty[$ et n'est ni paire ni impaire.
3. *Solution* : f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et est impaire.

Exercice 8 :

Utiliser les définitions.

IV Logique

Exercice 9 : (★)

Remarquer que $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$.

Exercice 10 : (★)

Raisonner par l'absurde et poser une valeur de ε permettant d'obtenir une contradiction.

Exercice 11 : (★)

Raisonner par contraposée.

Exercice 12 : (★)

Raisonner par l'absurde et poser une valeur de ε permettant d'obtenir une contradiction.

Exercice 13 : (★)

Raisonner par contraposée et utiliser la définition de $\mathbb{Q}$.

Exercice 14 : (★★)

Raisonner par l'absurde et utiliser que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j \leq \max(x_1, \dots, x_n)$ et sommer ces inégalités.

Exercice 15 : (★★)

1. (a) Faire le cas où n est pair et le cas où n est impair.
(b) *Solution* : $\exists k \in \mathbb{N}, n = 8k$
2. (a) *Solution* : "si l'entier n est impair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8".
(b) Factoriser $n^2 - 1$ et utiliser 1.a
(c) *Solution* : P est vraie

Exercice 16 : (★★)

Raisonner par double implication. Pour $\Rightarrow$, on pourra raisonner par l'absurde.

V Monotonie

Exercice 17 : (★)

1. Raisonner par récurrence.
2. Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en utilisant l'expression conjuguée. On se ramène à l'étude du signe d'un polynôme de degré 2.

Exercice 18 : (★★)

Raisonner par l'absurde pour montrer une des deux implications.

Exercice 19 : (★★)

On raisonne par l'absurde. Supposons que f ne soit pas strictement décroissante (et pas que f est croissante), c'est-à-dire, en écrivant la négation de la proposition logique, qu'il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \leq f(x_2)$.

En utilisant les deux hypothèses, montrer que $f \circ f \circ f(x_1) \leq f \circ f \circ f(x_2)$ et que $f \circ f \circ f(x_1) > f \circ f \circ f(x_2)$ ce qui donne une contradiction.

VI Systèmes linéaires

Exercice 20 :

Solution : $\{(-8 + 11z, 5 - 7z, z), z \in \mathbb{R}\}$

Exercice 21 :

Solution : $\{(2 - a, -5 + 3a + z, z), z \in \mathbb{R}\}$ si $a + b = 3$, $\emptyset$ sinon.

Exercice 22 :

Solution : $\left\{ \left(-\frac{m-1}{m}y + \frac{m+2}{m}, y \right), y \in \mathbb{R} \right\}$ si $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\{(3, -2)\}$ sinon.

Exercice 23 : (★)

Solution : $\left\{ \left(-\frac{2}{m-1}, \frac{3m}{m-1}, -\frac{1}{m-1} \right) \right\}$ si $m \neq 1$ et $m \neq -\frac{3}{2}$
 $\{(2z, 1 + 2z, z), z \in \mathbb{R}\}$ si $m = -\frac{3}{2}$
 $\emptyset$ si $m = 1$.

Exercice 24 : (★)

Solution : $\{(m, 1, \frac{1}{m})\}$ si $m \notin \{0, 1, -1\}$
 $\{(1, z, z), z \in \mathbb{R}\}$ si $m = 1$
 $\{(-1, -z, z), z \in \mathbb{R}\}$ si $m = -1$
 $\emptyset$ si $m = 0$.

VII Principe de récurrence

Exercice 25 : 

Raisonner par récurrence.

Exercice 26 : 

Raisonner par récurrence en remarquant que $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = (7+2) \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 2^n$.

Exercice 27 : 

Raisonner par récurrence en remarquant que $7^{n+1} - 1 = (6+1) \cdot 7^n - 1$.

Exercice 28 : (★★)

1. Raisonner par récurrence en remarquant que $2^{2^{n+1}} - 6 = ((2^{2^n} - 6) + 6)^2 - 6$.
2. Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est divisible par 9.

VIII Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques

Exercice 29 : (★)

1. Raisonner par récurrence.
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
Solution : (v_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$.
3. *Solution :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \frac{3}{2}n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2+3n}$.

Exercice 30 : (★)

1. Raisonner par récurrence et étudier le signe de $u_{n+1} - 2$.
2. *Solution :* (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2}$.
3. *Solution :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-2}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^{n-2} - 2 \cdot 3^{n-1}}{2^{n-2} - 3^{n-1}}$.

Exercice 31 : 

Etudier la suite $(u_n - 3)$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - \frac{1}{3^{n-1}}$

Exercice 32 : 

Etudier la suite $(u_n - 2)$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - (-1)^n$

Exercice 33 : (★)

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et remarquer que (v_n) est arithmético-géométrique.

Solution : $v_n = 3 \cdot 2^n - 1$ et $u_n = 3 \cdot 2^n - 1 + n$.

IX Fonctions périodiques

Exercice 34 : (★) On peut montrer que f et g sont $T_1 T_2$ périodique puis que $f+g$ est $T_1 T_2$ périodique.

X Autres principes de récurrence

Exercice 35 : 

Raisonner par récurrence à deux niveaux.

Exercice 36 : 

Raisonner par récurrence à trois niveaux.

Exercice 37 : (★)

Montrer par récurrence à deux niveaux que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}.$$

Exercice 38 : (★★)

Raisonner par récurrence à deux niveaux. On pourra remarquer que :

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right).$$

Exercice 39 : (★)

Raisonner par récurrence forte.

Exercice 40 : (★★)

Raisonner par récurrence forte.

Exercice 41 : (★★★)

Raisonner par récurrence forte en traitant les cas où $n+1$ est pair et $n+1$ est impair.

XI Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 42 : 

Utiliser l'équation caractéristique.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1+17n}{2^n}$.

Exercice 43 : (★)

$$\text{Solution : } u_n = \frac{1}{3}(u_0 + 2u_1) + \frac{2(u_0 - u_1)}{3(-2)^n}$$

XII Raisonnement par analyse-synthèse**Exercice 44 : (★)**

Raisonner par analyse-synthèse. On cherchera d'abord la valeur de g pour en déduire celle de h .

$$\text{Solution : } g : x \mapsto f(0) \text{ et } h : x \mapsto f(x) - f(0)$$

Exercice 45 : (★★)

Raisonner par analyse-synthèse. On cherchera d'abord la valeur de g en intégrant la relation $f = g + h$, pour en déduire celle de h .

$$\text{Solution : } g : x \mapsto 2x \cdot \int_0^1 f \text{ et } h : x \mapsto f(x) - 2x \cdot \int_0^1 f$$

Exercice 46 : (★★)

Analyse :

Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \circ g = g \circ f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant g la fonction constante égale à x , montrer que $f(x) = x$.

Synthèse :

Posons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$. Montrer que f convient, c'est à dire que pour toute fonction g (et pas seulement pour g constante), $f \circ g = g \circ f$.

$$\text{Solution : } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x.$$

Exercice 47 : (★★)

Raisonner par analyse-synthèse. Pour l'analyse : choisir des valeurs particulières de x dans la relation : $f(x) = ax + b$. Pour la synthèse, choisir des valeurs particulières de x, y et z dans la relation $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(x)-f(z)}{x-z}$.

Exercice 48 : (★★★)

Raisonner par analyse-synthèse. Dans l'analyse, introduire la suite définie par : $u_0 = x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Remarquer que cette suite est récurrente linéaire d'ordre 2.