

Indications du chapitre 2 : Etude de fonctions, fonctions logarithmes, exponentielle et puissances

I Continuité

II Dérivation

Exercice 1 : 

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}, f'_1(x) = -\frac{x^2-2}{(x^2-3x+2)^2}, \forall x \in]-\infty, 2[, f'_2(x) = \frac{4-x}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$ et $\forall x \in \mathbb{R},$

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

Exercice 2 : 

Solution : $f'(x) = -\frac{2(x-2)}{(x-1)^3}.$

Exercice 3 : (★)

Solution : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-1)(2-x)^3}}.$

Exercice 4 : (★)

Etudier le signe de f' . On peut comparer $f(0)$ et $f(2)$.

Solution : f n'est pas décroissante sur son ensemble de définition.

Exercice 5 : (★)

Etudier $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 6 : (★)

Etudier $x \mapsto x^4 - x^2 - 2x - 2$.

III Bijectivité

Exercice 7 : 

Montrer que f est strictement monotone.

Solution : f est bijective de $]0, +\infty[$ vers $]5, +\infty[$.

Exercice 8 : (★)

Résoudre l'équation $f(x) = y$.

Solution : $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$
 $x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$

Exercice 9 : (★)

1. Exhiber un contre-exemple.

Solution : f n'est pas bijective.

2. Résoudre l'équation $g(x) = y$ où $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in [-1, 1[$.

Solution : $g^{-1}: [-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Exercice 10 : 

1. Etudier les variations de f .

Solution : $f'(t) = -\frac{1}{t^2} - 2t$.

2. Montrer que f' ne s'annule pas et appliquer la formule de dérivation de la réciproque.

Solution : g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $g'(t) = -\frac{g(t)^2}{2g(t)^3 + 1}.$

Exercice 11 : (★)

1. Etudier la fonction f .

2. Etudier les points d'annulation de f' .

Solution : f^{-1} est dérivable sur $] -\infty, 1[$.

3. Utiliser la formule de la dérivée de la réciproque et remarquer que $f(1) = 1 - e$.

Solution : $(f^{-1})'(1 - e) = -\frac{1}{3e}$

Exercice 12 : (★)

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-5/3} + \frac{3}{2}x^{-5/2}.$

IV Fonctions logarithmes, exponentielle, puissances

Exercice 13 : 

1. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

2. *Solution :* $x \mapsto \frac{2x(\ln x - 1)}{(\ln(x))^3}$

3. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$

4. *Solution :* $x \mapsto -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

5. *Solution :* $x \mapsto (1 - 2x)e^{-2x}$

6. *Solution :* $x \mapsto \frac{2xe^{2x}}{(x+1)^3}$

Exercice 14 : (★)

Ne pas oublier de déterminer le domaine de définition de l'inéquation.

Solution : $\left] 1, \sqrt{\frac{e}{e-1}} \right[$.

Exercice 15 : (★)

Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses limites en $\pm\infty$.

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$.

Exercice 16 :

Etudier la fonction $x \mapsto e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})$.

Exercice 17 :

1. *Solution :* 0

2. Factoriser par x^2 dans le logarithme.

Solution : 0

3. *Solution :* 0

Exercice 18 : (★)

1. *Solution :* la fonction est croissante sur $]0, e^{-1/2}]$ et décroissante sur $[e^{-1/2}, +\infty[$ et tend vers $-\infty$ en 0 et vers 0 en $+\infty$.

2. *Solution :* la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$, tend vers -1 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.

Exercice 19 : (★)

1. Etudier les variations de g et appliquer le théorème de la bijection à la fonction g sur un intervalle bien choisi.

2. *Solution :* g est négative sur $]-\infty, \alpha]$ et positive sur $[\alpha, +\infty[$.

3. Exprimer f' en fonction de g .

Solution : f est décroissante sur $]0, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

4. Remarquer que f admet un minimum égal à $f(\alpha)$.

Exercice 20 : (★★)

Calculer f' et étudier le signe de $g : x \mapsto a(1 + bx) \ln(1 + bx) - b(1 + ax) \ln(1 + ax)$.

Comparer $f(\frac{1}{a})$ et $f(\frac{1}{b})$.

Exercice 21 :

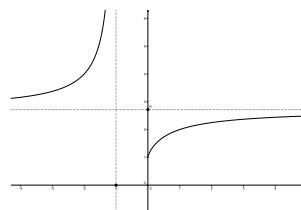
Regrouper les puissances de 2 d'un côté et les puissances de 3 de l'autre.

Solution : $x = \frac{3}{2}$

Exercice 22 : (★)

Traduire les puissances en exponentielles et logarithmes.

Solution :



Exercice 23 : (★) Ecrire $f(x) = \exp\left(\frac{x}{x-1} \ln x\right)$. On a : $f'(x) = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} > 0$. *Solution :* f est strictement croissante sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.