Indications du chapitre 3 : Arithmétique

I Division d'entiers

Exercice 1 : ($\star$)
Ecrire la division euclidienne de a par $a-b$ et celle de b par $a-b$ puis soustraire ces deux expressions.
Solution : On note r_1 (resp. r_2) le reste de la division euclidienne de a (resp. b) par $a-b$, q_1 (resp. q_2) le quotient de la division euclidienne de a (resp. b) par $a-b$. On a alors $r_1 = r_2$ et $q_1 = q_2 + 1$.

II pgcd

Exercice 2 :
n est un diviseur commun de 4365 et 819. Montrer que $\operatorname{pgcd}(4365, 819) = 9$.
Solution : $n = 9$

Exercice 3 :
n est un diviseur commun de 6372 et 3948. Montrer que $\operatorname{pgcd}(6372, 3948) = 12$.
Solution : $n = 12$

Exercice 4 :
Se ramener au calcul de $\operatorname{pgcd}(m, 2m+1)$.
Solution : n

Exercice 5 : ($\star$)

1. Faire deux cas selon la parité de n.
   Solution : 2 *si n est pair,* 1 *si n est impair.*
2. Factoriser a et b.
   Solution : $2(n+3)$ *si n est pair,* $n+3$ *si n est impair.*

III ppcm

Exercice 6 : ($\star\star$)
Poser $d = \operatorname{pgcd}(a,b), a = du$ et $b = dv$ puis montrer que $uv = 21$.
Solution : $(a,b) = (d, 21d)$ *ou* $(3d, 7d)$, $d \in \mathbb{N}^*$.

IV Nombres premiers

Exercice 7 : ($\star$)
Raisonner par l'absurde et considérer un diviseur de m.

Exercice 8 : ($\star$)
Ecrire la décomposition en facteurs premiers de a.

Exercice 9 : ($\star$)
Soit $k \in [\![2, n]\!]$, on veut montrer que $n! + k$ n'est pas premier.
On montre que $k | n! + k$, ainsi, comme $k \neq 1$ et $k \neq n! + k$, $n! + k$ n'est pas premier.
Remarquer, que les nombres $n! + k$, $k \in [\![2, n]\!]$ sont $n-1$ nombres entiers consécutifs non premiers. *Solution :* $(n+1)! + k$, *avec* $k \in [\![2, n+1]\!]$ *sont n entiers consécutifs non premiers.*
On écrit la liste des nombres non premiers jusqu'à en obtenir 5 consécutifs. On n'utilise pas la question précédente car le résultat obtenu est trop grand.
Solution : 24,25,26,27,28

Exercice 10 : ($\star$)
Considérer un diviseur premier de $n! + 1$.

Exercice 11 : ($\star\star$)
Ecrire les décomposition en facteurs premiers de a, b et c.

Exercice 12 : ($\star\star$)

1. Raisonner par récurrence.
2. Raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente.
3. Remarquer que les diviseurs de $2^{p-1}(2^p - 1)$ sont de la forme : $2^\alpha (2^p - 1)^\beta$ avec $\alpha \in [\![0, p-1]\!]$ et $\beta \in \{0, 1\}$.

Exercice 13 : ($\star\star$)

1. Les diviseurs de n sont les $p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_r^{j_r}$ avec, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $j_k \in [\![0, \alpha_k]\!]$.
   On conclut en calculant le nombre de possibilités.
   Solution : $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} (\alpha_k + 1)$
2. Montrons pas récurrence que sur r que : $S(n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$.
   - Pour $r = 1$, on a $n = p_1^{\alpha_1}, \dots$

- Soit $r \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat au rang r.
  Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}$. Les diviseurs de n sont de la forme : $m.p_{r+1}^j$ où m est un diviseurs de $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ et $j \in [\![0, \alpha_{r+1}]\!]$. Ainsi $S(n) = S(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) \sum_{j=0}^{\alpha_{r+1}} p_{r+1}^j$.
  Conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence et la formule de somme des suites géométriques.

Solution : $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$

3. Décomposer m et n en produit de facteurs premiers et utiliser le résultat précédent.