

I Cercle trigonométrique

Exercice 1 : (★)

Utiliser les formules $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.

Solution : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Exercice 2 : (★)

Remarquer que $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 3 : (★★)

Raisonner par récurrence.

II Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 4 :

Se ramener à un produit nul.

Solution : $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 5 : (★)

Poser $X = \cos(2x)$ et se ramener à un polynôme du second degré.

Solution : $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 6 : (★)

Transformer le sinus en cosinus.

Solution : $\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 7 : (★★)

Se ramener à un produit nul.

Solution : $\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 8 :

1. *Solution :* $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$
2. *Solution :* $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Exercice 9 : (★)

Se ramener à une équation du second degré.

Solution : $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

III Fonctions cosinus et sinus

Exercice 10 :

Solution : $f'(x) = -6 \cos(x) \sin^2(x)$, f est croissante sur $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ et sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ et décroissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 11 : (★) Pour étudier le signe de la dérivée, se ramener au signe d'un polynôme du second degré.

Solution : $f'(x) = 4 \cos^2(x) + 2 \cos(x) - 2$, f est 2π -périodique, impaire, croissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{3}, \pi]$.

Exercice 12 : (★★) *Solution :* $f'(x) = 2 \sin x \left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, f est croissante sur $[0, \frac{3\pi}{4}]$ et décroissante sur $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$.

Exercice 13 : (★★)

1. *Solution :* $2e^{-x} \cos(x - \frac{\pi}{3})$
2. Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous forme d'un produit.
Solution : $f'(x) = -2\sqrt{2}e^{-x} \cos(x - \frac{7\pi}{12})$, f est strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{13\pi}{12} + 2k\pi]$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et f est strictement croissante sur $[\frac{13\pi}{12} + 2k\pi, \frac{25\pi}{12} + 2k\pi]$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 14 : (★★)

1. *Solution :* $g_n(x) = \cos(x) - nx \sin(x)$.
2. *Solution :* g_n est décroissante.
3. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que g_n s'annule.

IV Tangente

Exercice 15 : (★)

1. *Solution :* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
2. *Solution :* f est π -périodique.

- Utiliser $f(0)$ pour montrer que f n'est pas impaire. Raisonner par l'absurde pour montrer que f n'est pas paire en utilisant, par exemple, les valeurs en $\pm \frac{\pi}{6}$.
Solution : f n'est ni paire ni impaire.
- Utiliser les formules de trigonométrie.
- Solution : f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ et sur $]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$.*

Exercice 16 : (★★)

- Solution : $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$*
- Solution : f est π -périodique.*
- Solution : f est impaire.*
- Pour étudier le signe de la dérivée, se ramener au signe d'un polynôme du second degré en $\cos^2 x$.
Solution : $f'(x) = \frac{4 \cos^4 x - 2 \cos^2 x - \frac{3}{4}}{\cos^2 x}$, f est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{6}[$ et strictement décroissante sur $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 17 : (★★)

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $f : x \mapsto \tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x)$ sur de intervalles bien choisis.

Solution : L'équation a 6 solutions.

Exercice 18 : (★★★) *Solution : $f'(x) = \frac{\tan(x)(4 + \cos x + \cos^2 x)\sqrt{1 - \cos x}}{2 \cos^2 x}$, f est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$.*

V Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Exercice 19 : (★)

Dériver deux fois $x \mapsto \operatorname{ch} x - 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 20 : (★)

Pour étudier le signe de f' , utiliser la croissance de sh .

Solution : f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 21 : (★★)

- Utiliser la forme exponentielle et se ramener à une équation d'ordre 2 en e^x .
Solution : $\ln(2 + \sqrt{5})$.
- Utiliser la question précédente et la monotonie de sh .
Solution : $]-\infty, \ln(2 + \sqrt{5})]$.
- Utiliser la forme exponentielle et se ramener à une équation d'ordre 2 en e^x .
Solution : $\ln(2 + \sqrt{3}), \ln(2 - \sqrt{3})$.

- Utiliser la question précédente et la monotonie de ch .

Solution : $[\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3})]$.

Exercice 22 :

Utiliser la définition avec les exponentielle.

Exercice 23 : (★★)

- (a) Montrer que f est continue, strictement monotone donc bijective de ... vers
(b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $f(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})) = \frac{\exp(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})) + \exp(-\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))}{2}$.
Ainsi $f(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}}{2} = \dots = x$.
Conclure.
- (a) Montrer que sh est continue, strictement monotone donc bijective de ... vers
(b) De même, calculer $\operatorname{sh}(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))$.

VI Fonctions circulaires réciproques

Exercice 24 : (★)

Etudier $f : x \mapsto \operatorname{Arccos} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - 2 \operatorname{Arctan} |x|$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 25 : (★★)

Calculer la dérivée de la fonction apparaissant dans le membre de gauche.

Solution : $]-1, 1]$

Exercice 26 : (★★)

Calculer la dérivée de la fonction apparaissant dans le membre de gauche.

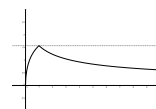
Solution : $\mathbb{R}$

Exercice 27 : (★★)

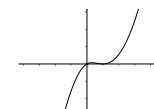
Dériver $x \mapsto \operatorname{Arcsin} \sqrt{1 - x^2} - \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ et utiliser la continuité et la valeur en 0 pour déterminer les constantes.

Exercice 28 : (★)

1. *Solution :*



2. *Solution :*



Exercice 29 : (★)

Faire une étude de fonctions.

Exercice 30 : (★★)

1. *Solution* : $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
2. *Solution* : f est 2π -périodique et impaire.
3. *Solution* : $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$
4. *Solution* : $f(x) = \frac{x}{2}$
5. Utiliser la parité puis la périodicité.
6. *Solution* : $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Exercice 31 : (★)

Utiliser les formules de trigonométrie.

1. *Solution* : $\frac{1-6x^2+x^4}{(1+x^2)^2}$
2. *Solution* : $\frac{x(3-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$

Exercice 32 : (★★)

- En utilisant la formule donnant $\tan(a+b)$, montrer que : $\tan(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y) = \frac{x+y}{1-xy}$.
- En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy} + k\pi$.
- Comme $\operatorname{Arctan} x, \operatorname{Arctan} y, \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que $k \in \{-1, 0, 1\}$.

- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, remarquer que $k = -1$ et que $\operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On a donc $\operatorname{Arctan} x < \operatorname{Arctan}(-y)$ donc $x < -y$, ainsi $x + y < 0$. De plus $\frac{x+y}{1-xy} > 0$. En déduire le signe de $1-xy$.

- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, raisonner de même.
- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, raisonner de même.
- Si $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, raisonner de même.

Exercice 33 : (★★)

1. Appliquer la fonction cosinus.

Solution : $\{\frac{\sqrt{5}}{5}\}$

2. Appliquer la fonction sinus.

Solution : $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Exercice 34 : (★★)

1. Appliquer la fonction tangente.

Solution : $\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\}$

2. Appliquer la fonction sinus.

Solution : $\{0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8}\}$

Exercice 35 : (★★)

Montrer que $\tan\left(4\operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}\right) = 1$ puis effectuer des encadrements.