Indications du chapitre 7 : Nombres complexes

I Ensemble des nombres complexes

Exercice 1 :
Solution : $\mathrm{Re}(z_1) = 22$, $Im(z_1) = 19$, $\mathrm{Re}(z_2) = -2$, $Im(z_2) = 3$.

Exercice 2 :
Solution : $\bar{z}_1 = -i(4+2i)^2$, $\bar{z}_2 = -\frac{i\sqrt{3}}{1-6i}$, $\bar{z}_3 = \frac{\bar{z}(1+iz)}{2\bar{z}+4iz}$.

Exercice 3 :
Multiplier le numérateur et le dénominateur par $\bar{z}$.
Solution : $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2+Im(z)^2}$ *et* $Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{Im(z)}{\mathrm{Re}(z)^2+Im(z)^2}$.

Exercice 4 : (⋆)
Calculer la partie réelle de $z+\frac{1}{z}$ en fonction de la partie réelle et de la partie imaginaire de z.

Exercice 5 :
Solution : On pose $x = \mathrm{Re}(z)$ *et* $y = Im(z)$*, alors* $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{2-x-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}$ *et* $Im(Z) = -\dfrac{3y}{(x-1)^2+y^2}$.

Exercice 6 : (⋆)
Ecrire z sous la forme $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
Solution : $\{\frac{3-4i}{8}\}$

II Module

Exercice 7 :
Multiplier et diviser par la quantité conjuguée du dénominateur.

Exercice 8 : (⋆)
Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$.

1. Montrer que : $\frac{a+b}{1+ab} = \overline{\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)}$ en remarquant que $\overline{a} = \frac{1}{a}$ et $\overline{b} = \frac{1}{b}$.
2. Remarquer que $|ab+bc+ca| = |\overline{ab+bc+ca}|$ et utiliser $\overline{a} = \frac{1}{a}$.

Exercice 9 : (⋆)
Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| \geq 1$, on a $|z|^2 \geq |z|$ et conclure.
- Si $|z| < 1$. Remarquer que $|z| = |z-z^2+z^2|$ et utiliser l'inégalité triangulaire pour montrer que : $|z| \leq |z||z-1| + |z|^2$ et conclure.

Exercice 10 : (⋆⋆)
Faire une preuve par récurrence.

Exercice 11 : (⋆ ⋆ ⋆)
Faire une récurrence. Pour l'initialisation ($n = 2$), utiliser, pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$.

III Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Exercice 12 :
Solution : $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$, $\quad \sin(3\theta) = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$.

Exercice 13 : (⋆)
Utiliser la factorisation par l'angle moitié.
Solution : $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-3\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Exercice 14 : (⋆⋆)
Remarquer que $\sin\left(5\frac{\pi}{5}\right) = 0$ pour en déduire que $x = \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation du second degré : $16x^2 - 20x + 5 = 0$.
Solution : $\sin(5\theta) = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 15 : (⋆)
Simplifier les expressions faisant apparaître t en utilisant les formules de trigonométrie.

Exercice 16 : (⋆)
Solution : $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$.

Exercice 17 : (⋆⋆)

1. Remarquer qur $\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ik\pi/3}\right)$ puis utiliser la formule de sommation de suites géométriques.
   Solution : $\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}2^n}$.
2. Remarquer qur $\sin(kx) = \mathrm{Im}\left(e^{ikx}\right)$ puis utiliser la formule de sommation de suites géométriques.
   Solution : $\dfrac{\cos x - (\cos x)^{n+1}\cos(nx)}{\sin x}$ *si* $x \not\equiv 0 \mod \pi$, $\quad 0$ *si* $x \equiv 0 \mod \pi$.

IV Argument d'un nombre complexe non nul

Exercice 18 :

1. Remarquer que $2013 = 167 * 12 + 9$.
   Solution : $-i2^{2013}$
2. *Solution :* -4
3. *Solution :* $2^n\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$.
4. *Solution :* $\dfrac{31-8i}{25}$.

Exercice 19 :
Solution : $z_1 = e^{i(a+\pi/2)}$, $z_2 = e^{i(-a+\pi/2)}$, $z_3 = e^{i(a+\pi)}$.

Exercice 20 :

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
   Solution : $z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
2. Identifier les parties réelle et imaginaire.
   Solution : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ *et* $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 21 :
Solution : $2^{10}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 22 :
Solution : $|z_1| = 2\sqrt{2}$, $Arg((z_1) = -\frac{7\pi}{12}$, $|z_2| = 4\sqrt{2}$, $Arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$, $|z_3| = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$, $Arg((z_3) = -\frac{\pi}{6}$, $|z_4| = 4\sqrt{3}$, $Arg(z_4) = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 23 : ($\star$)
Utiliser la forme trigonométrique de $1+i$ et de $1-i$ et la factorisation par l'angle moitié.
Solution : $z = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}}e^{3i\pi/4}$

Exercice 24 :
Si $z \neq 0$, écrire z sous forme trigonométrique.
Solution : $\{0, 1, -1, i, -i\}$

Exercice 25 : ($\star$)
Se ramener à une condition pour qu'une exponentielle soit réelle.
Solution : $\sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/6}$ *et* $(\sqrt{6}+i\sqrt{2})^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n \in 6\mathbb{N}$.

Exercice 26 : ($\star\star$)
Utiliser la facorisation par l'angle moitié pour aboutir à une disjonction de cas en fonction du signe de $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
Solution : si $\theta \in]-\pi+4k\pi, \pi+4k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, $|z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *et* $\arg(z) \equiv \frac{3\theta}{2}\ [2\pi]$,
si $\theta \in]\pi+4k\pi, 3\pi+4k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, $|z| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *et* $\arg(z) \equiv \pi + \frac{3\theta}{2}\ [2\pi]$,
si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, *alors* $z = 0$.

Exercice 27 : ($\star\star$)
Remarquer que : $\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p\begin{pmatrix}4n\\2p\end{pmatrix} = \mathrm{Re}((1+i)^{4n})$ et $\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p\begin{pmatrix}4n\\2p+1\end{pmatrix} = \mathrm{Im}((1+i)^{4n})$.
Solution : $\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p\begin{pmatrix}4n\\2p\end{pmatrix} = (-1)^n 2^{2n}$
et $\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p\begin{pmatrix}4n\\2p+1\end{pmatrix} = 0$.

V Équations algébriques

Exercice 28 :
Calculer les racines carrées de $1+i$ sous forme algébrique et trigonométrique.
Solution : les racines carrées de $1+i$ *sont* $\pm 2^{1/4}e^{i\pi/8} = \pm\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$
$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$

Exercice 29 :
Utiliser un système constitué d'une équation sur la partie réelle, d'une équation sur la partie imaginaire et une équation sur le module au carré.
Solution : $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{37}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{37}-1}{2}}\right)$

Exercice 30 :

1. *Solution :* $1+3i$ *et* $3-i$

2. *Solution :* $-1-i$ *et* $-3-2i$

Exercice 31 :
Se ramener à une équation du second ordre.
Solution : $\pm\sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8}$, $\pm i$.

Exercice 32 : ($\star$) Se ramener à une équation du second ordre et utiliser la méthode de calcul de racines carrées d'un complexe.
Solution : $1+i$, $-1-i$, $1+2i$, $-1-2i$.

Exercice 33 : ($\star$)
Soit $z\in i\mathbb{R}$, soit $y\in\mathbb{R}$ tels que : $z=iy$. Montrer que :

$$z^3-2z^2+2(2-3i)z-20=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y^2+6y-20=0 \\ -y^3+4y=0\end{array}\right.$$

La seconde équation donne $y=0$ ou $y=2$ ou $y=-2$ et en réinjectant dans la première équation, seul $y=2$ convient. Ainsi $z_0=2i$.
Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$,

$$(\forall z\in\mathbb{C},\ z^3-2z^2+2(2-3i)z-20=(z-2i)(az^2+bz+c) \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow a=1, b=-2+2i, c=-10i.$$

Après calcul, les racines de $z^2+(-2+2i)z-10i=0$ sont $z_1=3+i$, $z_2=-1-3i$.
Solution : $z_0=2i$, $z_1=3+i$, $z_2=-1-3i$.

Exercice 34 : ($\star\star$)
Utiliser les racines complexes de l'équation caractéristique et les propriétés des nombres complexes pour se ramener à une expression réelle.
Solution : $u_n=\dfrac{2\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^n}$

VI Racines n-ièmes

Exercice 35 :
Solution : $\{\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3})},\ k\in[\![0,5]\!]\}$.

Exercice 36 : ($\star$) Se ramener à une équation du second ordre et utiliser la méthode de calcul de racines cubiques d'un complexe.
Solution : $2^{1/6}e^{-i\pi/12}$, $2^{1/6}e^{i7\pi/12}$, $2^{1/6}e^{i15\pi/12}$, $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$, $\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$, i.

Exercice 37 : ($\star$) Remarquer que $z-1$ est une racine n-ième de l'unité. Utiliser la factorisation par l'angle moitié en faisant attention au signe du facteur réel.
Solution : $z=2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{ik\pi/n}$, $0\le k\le\frac{n}{2}$, $z=-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i(k\pi/n+\pi)}$, $\frac{n}{2}<k\le n-1$.

Exercice 38 : ($\star\star$)
Ramener l'équation à $\left(\dfrac{\sqrt{2}(z+i)}{z+1}\right)^4=1$ et utiliser les racines quatrièmes de l'unité ou se ramener à deux équations de degré 2.
Solution : $\dfrac{-\sqrt{2}i-1}{1+\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt{2}i-1}{1-\sqrt{2}}$, $\dfrac{(1+\sqrt{2})(-1-i\sqrt{2})}{3}$, $\dfrac{(1-\sqrt{2})(-1+i\sqrt{2})}{3}$.

Exercice 39 : ($\star$)

1. *Solution :* $u+v=-1$, $u^2=-2-u$.
2. Remarquer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)=\operatorname{Im}(u)$ puis que u est racine du polynôme X^2+X+2 et enfin, déterminer le signe de cette quantité.
   Solution : $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 40 : ($\star\star$)

1. Utiliser les racines quatrièmes de l'unité.
   Solution : $0, -\frac{3}{5}+\frac{i}{5}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}-\frac{i}{5}$
2. Si les points appartiennent à un même cercle, le centre appartient aux médiatrices de tous les segments formés à partir de deux points.
   En utilisant les points d'affixe $-\frac{3}{5}+\frac{i}{5}$ et $-\frac{3}{5}-\frac{i}{5}$ puis 0 et $-\frac{2}{3}$, déterminer les coordonnées du centre. Puis calculer 4 modules pour prouver que les points sont bien sur un même cercle.
   Solution : Centre $(-\frac{1}{3},0)$ *et rayon* $\frac{1}{3}$.

Exercice 41 : ($\star\star$)
Montrer que $z=-(a+i)^4$.
Solution : $\pm\dfrac{(a-1)+i(1+a)}{\sqrt{2}}$, $\pm i\dfrac{(a-1)+i(1+a)}{\sqrt{2}}$.

Exercice 42 : ($\star\star$)
Etablir le lien entre la quantité à calculer et $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\cos\frac{(2k+1)\pi}{11}$.

VII Exponentielle complexe

Exercice 43 :

1. *Solution :* $\left\{\frac{i\pi}{2}+2ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
2. *Solution :* $\{\ln 2+2ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

3. *Solution :* $\left\{\ln 2+\frac{i\pi}{2}+2ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. *Solution :* $\left\{\frac{\ln 2}{2}+\frac{i\pi}{6}+ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 44 : (⋆)
Se ramener à une équation du second degré en e^z.
Solution : $\left\{i\frac{2\pi}{3}+2ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{i\frac{4\pi}{3}+2ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

VIII Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Exercice 45 : (⋆⋆)
Remarquer que $f(x)=\mathrm{Re}\,(e^{(1+i)x})$ et que la dérivée n-ième de $x\mapsto e^{(1+i)x}$ est $x\mapsto(1+i)^n e^{(1+i)x}$ et calculer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$.
Solution : $x\mapsto(\sqrt{2})^n\cos(x+n\frac{\pi}{4})e^x$.

Exercice 46 : (⋆⋆)
Linéariser $\cos^3$ et $\sin^3$ puis utiliser la même méthode que dans l'exercice 22.
Solution : $(\cos^3)^{(n)}: x\mapsto\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
et $(\sin^3)^{(n)}: x\mapsto-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

IX Interprétation géométrique des nombres complexes

Exercice 47 : (⋆)
Utiliser le quotient $\dfrac{z^4-z^2}{z-z^2}$.
Solution : $\mathrm{Re}\,z=-\frac{1}{2}$ *ou* $\mathrm{Im}\,z=0$.

Exercice 48 : (⋆⋆)
Utiliser le quotient $\dfrac{z+i}{\frac{1}{z}+i}$.
Solution : $\mathrm{Re}\,z=0$ *ou* $|z-i|=\sqrt{2}$.

Exercice 49 : (⋆)
1. *Solution :* $|a|=2$, $Arg(a)=-\frac{\pi}{6}$.
2. *Solution :* $f(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$.
3. *Solution :* $b=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=2e^{i\frac{\pi}{12}}$.
4. *Solution :* $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.