Indications du chapitre 8 : Primitives

I Calcul de primitives

Exercice 1 :
Se ramener à la forme $u'u^{\alpha}$.

1. *Solution :* $x \mapsto -\frac{1}{3(x^2-3x+10)^3}$
2. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$
3. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{2}(Arctan\, x)^2$
4. *Solution :* $x \mapsto -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}$
5. *Solution :* $x \mapsto 2\sqrt{1+e^x}$
6. *Solution :* $x \mapsto \frac{(\ln(3x+6))^4}{4}$
7. *Solution :* $x \mapsto -\frac{1}{3(x^2-5x+9)^3}$

Exercice 2 :
Solution : $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Exercice 3 :
On peut linéariser ou écrire $\sin^3(x) = \sin(x)(1-\cos^2(x))$.
Solution : $x \mapsto -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3(x)$.

Exercice 4 : (⋆⋆)
Utiliser les formules de l'angle double.
Solution : $\int^x \frac{1}{\sin t}\, dt = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C_k$ *pour* $x \in]k\pi, (k+1)\pi[$ *et* $\int^x \frac{1}{\cos t}\, dt = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_k$ *pour* $x \in \left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$

Exercice 5 :
Utiliser l'exponentielle complexe.
Solution : $x \mapsto e^{2x}\left(\frac{2}{13}\cos(3x) + \frac{3}{13}\sin(3x)\right)$

Exercice 6 :

1. *Solution :* 0,
2. *Solution :* $\frac{5}{3}$,
3. *Solution :* 0,
4. *Solution :* $\frac{3}{8}$,
5. Utiliser les formules de trigonométrie pour montrer que : $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.
   Solution : $\frac{\pi}{2}$,
6. *Solution :* $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Exercice 7 : (⋆)

Se ramener à la forme $u'u^{\alpha}$.

1. *Solution :* $\frac{1}{n+1}$
2. *Solution :* $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$

Exercice 8 :
Se ramener à la forme $u'u^{\alpha}$.

a. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{4}\ln^4(2x+4)$.
b. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+2}$.

Exercice 9 : (⋆)

1. Raisonner par équivalences.
   Solution : $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$
2. *Solution :* $2 + 2\ln 2$

Exercice 10 : (⋆⋆)
Etudier le signe de $x \mapsto \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$ en faisant intervenir l'étude de signe de $x \mapsto 2\int_0^x f - f^2(x)$.

II Intégration par parties et changement de variable

Exercice 11 :
Effectuer des intégrations par parties.

1. *Solution :* $x \mapsto x Arcsin\, x + \sqrt{1-x^2} + \lambda$, *sur* $]-1,1[$
2. *Solution :* $x \mapsto x\tan x + \ln|\cos x| + \lambda_k$, *sur* $\left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$

Exercice 12 : (⋆)

1. Effectuer une intégration par parties avec $u(t) = \text{Arctan}\,(t)$ et $v'(t) = t$ puis remarquer que $t^2 = (1+t^2)-1$.
   Solution : $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

2. Effectuer une intégration par parties avec $u(t) = \cos^2(t)$ et $v'(t) = \cos(t)\sin^4(t)$ pu remarquer que $\cos^3(t)\sin^4(t) = \cos(t).\cos^2(t)\sin^4(t) = \cos(t).(1-\sin^2(t))\sin^4(t)$.
   Solution : $\frac{2}{35}$

Exercice 13 : ($\star$)
Effectuer des intégrations par parties.

1. *Solution :* $x \mapsto x\mathit{Arctan}\, x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \lambda$, *sur* $\mathbb{R}$
2. *Solution :* $x \mapsto \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + \lambda$, *sur* $\mathbb{R}^{+*}$

Exercice 14 :
Effectuer des intégrations par parties successives.
Solution : $x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{37}{8}\right)e^{2x}$

Exercice 15 : ($\star$)
Calculer $\int^x t^3 \cos t\, dt + i\int^x t^3 \sin t\, dt$ en effectuant des intégrations par parties.
Solution : $\int^x t^3 \cos t\, dt = (3x^2-6)\cos x + (x^3-6x)\sin x$ *et* $\int^x t^3 \sin t\, dt = (-x^3+6x)\cos x + (3x^2-6)\sin x$.

Exercice 16 : ($\star$)

1. *Solution :* $x \mapsto \frac{x^2}{12}\cos 3x - \frac{x}{18}\sin 3x - \frac{1}{54}\cos 3x - \frac{3x^2}{4}\cos x + \frac{3x}{2}\sin x + \frac{3}{2}\cos x + C$, *sur* $\mathbb{R}$
2. *Solution :* $x \mapsto (-x^2+x-1)\cos x + (2x-1)\sin x + C$, *sur* $\mathbb{R}$
3. *Solution :* $x \mapsto \left(\frac{x^2}{2}\cos x + (\frac{x^2}{2} - x + 1)\sin x\right)e^x + C$, *sur* $\mathbb{R}$
4. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{8}(2x^2+1)sh 2x - \frac{1}{4}x ch 2x - \frac{x^3}{6} + C$, *sur* $\mathbb{R}$

Exercice 17 : ($\star$) Effectuer deux intégrations par parties.
Solution : $I_n = n\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - (n-1)I_{n-2}\right)$.

Exercice 18 : ($\star\star$)
Poser, pour $p \in \mathbb{N}$, $u_p = \dfrac{(-1)^p I_{2p}}{(2p)!}$ et $v_p = \dfrac{(-1)^p I_{2p+1}}{(2p+1)!}$. Calculer $u_p - u_{p-1}$ et $v_p - v_{p-1}$ puis sommer afin de faire apparaître des sommes télescopiques.

Solution : $I_{2n} = (-1)^n(2n)!\left(1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{(2p-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1}\right)$

et $I_{2n+1} = (-1)^n(2n+1)!\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{(2p)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p}\right)$

Exercice 19 :
Effectuer le changement de variable $t = x^5$.
Solution : $\frac{\pi}{20}$

Exercice 20 :
Effectuer le changement de variable $t = e^x$.
Solution : $x \mapsto e^x - \ln(1+e^x)$.

Exercice 21 : ($\star$)

1. Effectuer le changement de variable $t = x^4$ et remarquer que $t = (t+1) - 1$.
   Solution : $x \mapsto \frac{1}{4(x^4+1)} + \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$ *sur* $\mathbb{R}$
2. Effectuer le changement de variable $t = e^x$.
   Solution : $x \mapsto \mathit{Arctan}(e^x) + C$ *sur* $\mathbb{R}$
3. Effectuer le changement de variable $t = \sqrt{x}$.
   Solution : $x \mapsto 2\mathit{Arctan}(\sqrt{x}) + C$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$
4. Effectuer le changement de variable $t = \sqrt{x}$ puis une intégration par parties.
   Solution : $x \mapsto 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$ *sur* $\mathbb{R}^+$

Exercice 22 : ($\star$) Calculer une primitive de :

1. *Solution :* $x \mapsto \mathit{Arctan}\sqrt{x^2-1}$
2. *Solution :* $x \mapsto 2\mathit{Arctan}\sqrt{e^x-1}$

Exercice 23 :
Effectuer le changement de variable $t = \frac{x}{a}$.
Solution : $\int^x \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}dt = \mathit{Arcsin}\frac{x}{a}$ *et* $\int^x \frac{1}{a^2+t^2}dt = \frac{1}{a}\mathit{Arctan}\frac{x}{a}$

Exercice 24 : ($\star$)

1. Remarquer que $t \mapsto \frac{1-t^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. *Solution :* $\mathbb{R}^*$
2. On effectue dans $f(\frac{1}{x})$ le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, on a $du = -\frac{1}{t^2}dt = -u^2 dt$ donc :
$$f(\frac{1}{x}) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1-\frac{1}{u^2}}{(1+\frac{1}{u^2})\sqrt{1+\frac{1}{u^4}}}\frac{-1}{u^2}du = \cdots \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1-u^2}{(1+u^2)\sqrt{1+u^4}}du = f(x).$$
3. Montrer que $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

Exercice 25 : ($\star\star$)

1. Remarquer que F est une primitive d'une fonction continue.
2. *Solution :* $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathit{Arctan}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$.
3. La continuité donne : $F(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} F(x)$.
   Solution : $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Exercice 26 : ($\star\star$)
Effectuer le changement de variable $t = \operatorname{Arcsin} x$ puis faire des intégrations par parties.
Solution : $x \mapsto x(\mathit{Arcsin}\, x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\mathit{Arcsin}(x) - 2x$.

III Fractions rationnelles

Exercice 27 :
Solution : $x \mapsto \ln|x-2| - \ln|x-1|$

Exercice 28 :
Solution : $x \mapsto \frac{1}{6} Arctan\left(\frac{3x+1}{2}\right)$

Exercice 29 : ($\star$)

1. *Solution :* $x \mapsto -\ln|x-2| + \ln|x-3|$
2. *Solution :* $x \mapsto -\frac{1}{x+1}$
3. *Solution :* $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

Exercice 30 : ($\star\star$) Effectuer un changement de variable.
Solution : $x \mapsto \frac{1}{6} \ln \frac{|x^2-2|}{x^2+1} + C_j$ *sur* $I_1 =]-\infty, -\sqrt{2}[$, $I_2 =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ *et* $I_3 =]\sqrt{2}, +\infty[$

Exercice 31 : ($\star$)

a. Remarquer que $\frac{x^3+2x}{x^2+x+1} = x-1+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.
Solution : $\displaystyle\int^x \frac{t^3+2t}{t^2+t+1}\,dt = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+x+1| + C$ *sur* $\mathbb{R}$.

b. Remarquer que $\frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2}$.
Solution : $\displaystyle\int^x \frac{2t-1}{(t+1)^2}\,dt = 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C(x)$ *où* $C(x)$ *constant sur* $]-\infty,-1[$ *et sur* $]-1,+\infty[$.

c. Remarquer que $\frac{2x}{x^2-x+1} = \frac{2x-1+1}{x^2-x+1}$.
Solution : $\displaystyle\int^x \frac{2t}{t^2-t+1}\,dt = \ln|x^2-x+1| + \frac{2\sqrt{3}}{3} Arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 32 : ($\star$)
Solution : $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} Arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

Exercice 33 : ($\star\star$)
Raisonner par identification.
Solution : $\int^x \frac{1}{t^3+1}\,dt = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} Arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C(x)$, *où* $C(x)$ *constant sur* $]-\infty,-1[$ *et sur* $]-1,+\infty[$