Exercice 13 :

Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A.

1. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.
2. Déterminer la probabilité que l'une au moins des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée était blanche.

Correction :

✎ *Les tirages sont faits au hasard, donc on utilise l'équiprobabilité. Il n'y a pas d'ordre, donc on considère les tirages simultanés. On a besoin de connaître la composition des urnes au moment du tirage, c'est-à-dire le nombre de boules transférées, on introduit dons les événements correspondants.*

Pour $k \in [\![0,2]\!]$, on note A_k : « on transfère k boules blanches de l'urne B dans l'urne A »

1. On a :

$$P(A_0) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{14}{33},\ P(A_1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{16}{33},\ P(A_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{1}{11}.$$

✎ *On ne s'intéresse ici qu'à la partie de l'expérience concernant le transfert de 2 boules, on tire donc 2 boules de l'urne B qui contient 12 boules, le nombre total de possibilités est $\binom{12}{2}$.*
Pour A_0, on a tiré 0 boules blanches donc 2 boules noires, or il y a 8 boules noires dans B donc Card$(A_0) = \binom{8}{2}$. On raisonne de même pour les autres termes.
De plus, on note B l'événement « on pioche une boule blanche de l'urne A »on a :

$$P(B|A_0) = \frac{6}{13},\ P(B|A_1) = \frac{7}{13},\ P(B|A_2) = \frac{8}{13}.$$

✎ *On peut calculer les probabilités sachant A_k car on connaît la composition de l'urne A. Par exemple, sachant A_0, il y a 6 boules blanches et 7 boules noires dans l'urne A.*

Or, (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements.
✎ *Il faut obligatoirement citer cette hypothèse pour appliquer la formule des probabilités totales.*

Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(B|A_0)P(A_0) + P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \frac{220}{429}.$$

2. On cherche $P(A_1 \cup A_2|B)$.
On pose C : « l'une au moins des boules transférées est blanche ».
On a : $C = A_1 \cup A_2$. Ainsi :

$$P(C|B) = P(A_1 \cup A_2|B) = P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$$

car A_1 et A_2 sont incompatibles et P_B est une probabilité.
✎ *Il faut maintenant inverser les conditionnement pour se ramener aux valeurs connues.*

$$\begin{aligned} P(C|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} + \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{16}{33} \times \frac{7}{13}}{\frac{220}{429}} + \frac{\frac{1}{11} \times \frac{8}{13}}{\frac{220}{429}} \\ &= \frac{28}{55} + \frac{6}{55} \\ &= \frac{34}{55} \end{aligned}$$

.