TD informatique du chapitre 17 : Arithmétique

Exercice 1 : On considère la fonction suivante :

```
def f(a,b) :
    while b>0 :
        a,b=b,a%b
    return a
```

1. La fonction f a-t-elle un effet de bord ?
2. Expliquer ce que fait la fonction f.

Exercice 2 : Crible d'Erathostène

1. (a) Ecrire une fonction ayant pour paramètre un entier $n \geq 2$ et répondant True si n est premier, False si n n'est pas premier.
   (b) En utilisant la fonction définie à la question précédente, écrire une fonction donnant tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier n donné.
   (c) Quelle est la complexité du programme écrit à la question précédente ?

2. On souhaite, comme à la question 1.(b), écrire une fonction donnant tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier n donné en utilisant la méthode du crible d'Erathostène.
   Le principe du crible d'Erathostène est le suivant :
   - *On part d'un tableau (ou du point de vue informatique d'une liste) des entiers inférieurs ou égaux à n. (Dans l'exemple $n = 50$)*
   - *On raye* 1
   - *On conserve le premier entier non rayé, ici 2 et on raye tous ses multiples différents de 2.*
     On obtient le tableau suivant :

$\cancel{1}$	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	9	$\cancel{10}$
11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	15	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$
21	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	25	$\cancel{26}$	27	$\cancel{28}$	29	$\cancel{30}$
31	$\cancel{32}$	33	$\cancel{34}$	35	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	39	$\cancel{40}$
41	$\cancel{42}$	43	$\cancel{44}$	45	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	49	$\cancel{50}$

   - *On conserve le premier entier non rayé, ici 3 et on raye tous ses multiples différents de 3.*

$\cancel{1}$	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$
$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	25	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	29	$\cancel{30}$
31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	35	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$
41	$\cancel{42}$	43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	49	$\cancel{50}$

   - *On réitère la procédure jusqu'à $\sqrt{n}$.*
   - *Les éléments non rayés du tableau sont les nombres premiers inférieurs ou égaux à n.*

$\cancel{1}$	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$
$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	29	$\cancel{30}$
31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$
41	$\cancel{42}$	43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	$\cancel{49}$	$\cancel{50}$

   Ecrire la fonction correspondant au crible d'Erathostène. Pour cela, on pourra créer une liste comprenant le booléen False pour les nombres rayés et True pour les autres.

3. Comparer la complexité des deux programmes obtenus.
   On pourra admettre (ou le prouver si le temps le permet) que :

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n).$$

Exercice 3 : E3A - PSI - 2016

1. On donne les programmes Python `P0` et `P1` suivants. Que renvoient les appels `P0(5)`, `P1(5)` et `P0(9)`, `P1(9)` ? Dire en une phrase ce que fait chacun des programmes `P0` et `P1` ?

```
def P0(N): #N entier naturel
    if N==1 :
        return False
    if N==2:
        return True
    for d in range(2,N):
        if N%d==0:
            return False
        return True
```

```
def P1(N): #N entier naturel
    if N==1 :
        return False
    if N==2:
        return True
    for d in range(2,N):
        if N%d==0:
            return False
    return True
```

2. En une phrase, dire ce que fait le programme python, `P2`, qui utilise le programme `P1` précédent :

```
def P2(N): #N entier naturel
    L=[]
    k=0
    n=k*k+1
    while n<=N:
        if P1(n):
            L.append(n)
        k=k+1
        n=k*k+1
    return L
```

   Que renvoie l'appel `P2(127)` ?

3. Ecrire une fonction `nextPrime` en langage python qui prend en argument un entier `N` et qui retourne comme valeur le premier nombre premier qui est strictement supérieur à `N`.

4. **Nombres jumeaux**
   On appelle *couple de nombres premiers jumeaux* toute liste `[p,q]` telle que `p,q` sont des nombres premiers vérifiant `p` < `q` et `q` = `p` + 2. Par exemple, `[3,5]` ou `[11,13]` sont des couples de nombres premiers jumeaux alors que `[2,3]` ne l'est pas.

   (a) Ecrire à l'aide de la fonction `nextPrime` précédente, une fonction python nommée `jumeau`, prenant comme argument un entier `N` et renvoyant le couple `[p,q]` de nombres premiers jumeaux tels que `p` strictement supérieur à `N` et le plus petit possible.
   Par exemple `jumeau(5)` renvoie comme valeur `[11,13]`.

   (b) Ecrire avec les mêmes consignes une fonction `lesJumeaux` prenant en argument un entier `N` et renvoyant la liste de tous les couples de nombres premiers jumeaux `[p,q]` tels que `q` ≤ `N`.
   Par exemple, `lesJumeaux(18)` retourne `[[3,5],[5,7],[11,13]]` (le couple `[17,19]` n'en fait pas partie).

Exercice 4 : E3A - PC - 2017

1. Ecrire une fonction `divise(p,q)` d'arguments deux entiers naturels non nuls `p` et `q`, renvoyant `True` si p divise q et `False` sinon.
2. Ecrire une fonction `estpremier(p)` d'argument un entier naturel `p`, renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon.
3. Ecrire une fonction `phi(p)` d'argument un entier naturel `p`, renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\varphi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

   Pour la suite de cet exercice, on admettra le résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)\varphi(n)}{n} = 1$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\Theta(n) = \left|\dfrac{\varphi(n)\ln(n)}{n} - 1\right|$.

   (a) Prouver que le théorème des nombres premiers implique qu'il existe une infinité de nombres premiers.

   (b) Ecrire une fonction `test(epsilon)` d'argument un réel `epsilon` strictement positif, renvoyant le premier entier naturel $n \geq 50$ tel que $\Theta(n) \leq \varepsilon$.

   (c) Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $[\![50, 5000]\!]$. [1]

1. Afin de tester informatiquement la fonction, on se contentera de $[\![50, 500]\!]$.