CORRECTION

DM 10

1- Une fonction f est décroissante sur I si :
$$\boxed{\forall x, y \in I, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)}.$$

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $x \leq y$.
Soit $t \in [0,1]$, on a : $\dfrac{e^t}{x+t} \geq \dfrac{e^t}{y+t}$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,dt \geq \int_0^1 \frac{e^t}{y+t}\,dt$, ainsi $f(x) \geq f(y)$.

Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}.}$

2-a) Soit $x \in [\frac{x_0}{2}, +\infty[$

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \left| \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,dt - \int_0^1 \frac{e^t}{x_0+t}\,dt \right| \\
&\leq \int_0^1 e^t \left| \frac{1}{x+t} - \frac{1}{x_0+t} \right| dt \\
&\leq \int_0^1 e^t \frac{|x_0 - x|}{(x+t)(x_0+t)}\,dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{e\,|x_0 - x|}{x x_0}\,dt \\
&\leq e|x_0 - x| \int_0^1 \frac{1}{\frac{x_0}{2} \cdot x_0}\,dt \\
&\leq e|x_0 - x| \frac{2}{x_0^2} \int_0^1 dt
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{|f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{2e|x_0 - x|}{x_0^2}.}$

b) Au voisinage de x_0, $|f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{2e|x_0 - x|}{x_0^2}$.

Or $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{2e|x_0 - x|}{x_0^2} = 0$, donc, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est continue en } x_0.}$

3- • Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $t \in [0,1]$, on a : $\dfrac{e^t}{x+1} \leq \dfrac{e^t}{x+t} \leq \dfrac{e^t}{x}$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+1}\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x}\,dt$

D'où : $\dfrac{1}{x+1}\left[e^t\right]_0^1 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}\left[e^t\right]_0^1$.

Ainsi : $\boxed{\dfrac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{e-1}{x}.}$

• On a : $\dfrac{e-1}{x+1} \underset{+0}{\sim} \dfrac{e-1}{x}$ donc $\boxed{f(x) \underset{+0}{\sim} \dfrac{e-1}{x}.}$

4-a) • exp est dérivable sur $[0,1]$ et : $\forall x \in [0,1]$, $|\exp'(x)| = e^x \leq e$.

• Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$\forall t \in [0,1]$, $|e^t - e^0| \leq e\,|t-0|$

Posons $M = e$. On a $M > 0$ et : $\boxed{\forall t \in [0,1],\ |e^t - 1| \leq Mt}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle |g(x)| \leq \int_0^1 \frac{|e^t-1|}{x+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{Mt}{x+t}\,dt$

$\displaystyle \leq \int_0^1 \frac{M(x+t)}{x+t}\,dt \leq M$

Donc $\boxed{g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^{+*}}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,dt + \int_0^1 \frac{e^t-1}{x+t}\,dt$

$= \left[\ln(x+t)\right]_0^1 + g(x)$

$= \ln(x+1) - \ln(x) + g(x)$

Donc, si $x \neq 1$, $\dfrac{f(x)}{-\ln(x)} = 1 - \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - \dfrac{g(x)}{\ln(x)}$

Or, comme g est bornée et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$, on a : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{\ln x} = 0$

et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{-\ln(x)} = 1$.

Ainsi $\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)}$

5 a) h est dérivable sur $[0,1]$ et, soit $t \in [0,1]$ ③

$$h'(t) = \frac{e^t(1+t) - e^t}{(1+t)^2} = \frac{te^t}{(1+t)^2}$$

Donc $h'(t) \geq 0$

Donc $\boxed{h \text{ est croissante sur } [0,1]}$

b) u_n et v_n représentent les aires des rectangles à droite et à gauche de la courbe.

c) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$.

Comme h est croissante : $h(\frac{k}{n}) \leq h(t) \leq h(\frac{k+1}{n})$

Donc $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(\frac{k}{n}) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(t)\,dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(\frac{k+1}{n})\,dt.$

Ainsi $\boxed{\frac{1}{n} h(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(t)\,dt \leq \frac{1}{n} h(\frac{k+1}{n})}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h(\frac{k}{n}) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(t)\,dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h(\frac{k+1}{n})$

Donc $u_n \leq \int_0^1 h(t)\,dt \leq v_n$

Or : $\int_0^1 h(t)\,dt = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t}\,dt = f(1).$

D'où $u_n \leq f(1) \leq v_n$

Ainsi $\frac{u_n - v_n}{2} \leq f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$.

Ainsi $\left| f(1) - \frac{u_n+v_n}{2} \right| \leq \frac{v_n - u_n}{2}$.

Or $\frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} h(\frac{k}{n}) - \sum_{k=0}^{n-1} h(\frac{k}{n})\right) = \frac{1}{2n}(h(1) - h(0))$

Donc $\boxed{\left| f(1) - \frac{u_n+v_n}{2} \right| \leq \frac{1}{2n}(h(1) - h(0))}$