CORRECTION DM11

Problème 1 :

1- a) Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)) = \left(\frac{3}{2}(\lambda x_1+\mu x_2)+\frac{1}{2}(\lambda y_1+\mu y_2), -\frac{1}{2}(\lambda x_1+\mu x_2)+\frac{1}{2}(\lambda y_1+\mu y_2)\right)$$
$$= \lambda\left(\frac{3}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1, -\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1\right)+\mu\left(\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}y_2, -\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}y_2\right)$$
$$= \lambda f(x_1,y_1)+\mu f(x_2,y_2).$$

Donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).}$

b) • $u=(1,0)$, $f(u)=\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ donc u et $f(u)$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi $(u, f(u))$ est libre.

• Card $(u, f(u)) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

Donc $\boxed{(u, f(u)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$

c) • $(f\circ f - 2f)(u) = f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (2,-1)-(3,-1) = (-1,0) = -u$

$(f\circ f-2f)(f(u)) = f(2,-1) - 2(2,-1) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right) - 2(2,-1) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -f(u)$

Donc $\boxed{(f\circ f-2f)(u) = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(u) \text{ et } (f\circ f-2f)(f(u)) = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(f(u))}$

• Comme $(u, f(u))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $f\circ f-2f, -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, on a :

$$\boxed{f\circ f - 2f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}.}$$

d) On a : $2f - f\circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ donc $(2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}-f)\circ f = f\circ(2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}-f) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1} = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} - f.}$

2- • $(u, \varphi(u))$ est libre.

• Card $(u, \varphi(u)) = 2 = \dim E$.

Donc $\boxed{(u, \varphi(u)) \text{ est une base de } E.}$

b) . $\varphi\circ\varphi(u) \in E$ donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\varphi\circ\varphi(u) = -\lambda\varphi(u) - \lambda u$$

Ainsi $\varphi\circ\varphi(u) + \lambda\varphi(u) + \mu u = 0_E$.

. On a : $(\varphi\circ\varphi + \lambda\varphi + \mu\, Id_E)(u) = 0_E$

et $(\varphi\circ\varphi + \lambda\varphi + \mu\, Id_E)(\varphi(u)) = \varphi(\varphi\circ\varphi(u) + \lambda\varphi(u) + \mu u) = \varphi(0_E) = 0_E$

. $(u, \varphi(u))$ est une base de E et $\varphi\circ\varphi + \lambda\varphi + \mu\, Id_E \in \mathcal{L}(E)$ donc :

$$\boxed{\varphi\circ\varphi + \lambda\varphi + \mu\, Id_E = 0_E.}$$

c) On a : $-\frac{1}{\mu}(\varphi\circ\varphi + \lambda\varphi) = Id_E$

Donc $\varphi\circ(-\frac{1}{\mu}(\varphi + \lambda Id_E)) = (-\frac{1}{\mu}(\varphi + \lambda Id_E))\circ\varphi = Id_E$.

Ainsi $\boxed{\varphi \in GL(E) \text{ et } \varphi^{-1} = -\frac{1}{\mu}(\varphi + \lambda\, Id_E)}$

d) On a : $\varphi\circ\varphi + \lambda\varphi = 0_E$ donc $\varphi\circ(\varphi + \lambda Id_E) = 0_E$.

. Si $\varphi \in GL(E)$ alors $\varphi^{-1}\circ\varphi\circ(\varphi + \lambda Id_E) = 0_E$ donc $\varphi + \lambda Id_E = 0_E$.

Ainsi $\varphi = -\lambda Id_E$ et φ est une homothétie.

. Donc : $\boxed{\varphi \notin GL(E) \text{ ou } \varphi \text{ est une homothétie.}}$

3 - a). Posons $f_1 : x \mapsto (x+1)e^x$ et $f_2 : x \mapsto (x-1)e^x$

On a : $E = Vect(f_1, f_2)$ donc $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel.}}$

. f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires donc (f_1, f_2) est libre.

Ainsi (f_1, f_2) est une base de E.

Donc $\dim E = Card(f_1, f_2)$, ainsi $\boxed{\dim E = 2.}$

b) . Soit $f, g \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

Donc φ est linéaire.

. Soit $f \in E$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x+1)e^x + b(x-1)e^x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(f)(x) = ae^x + a(x+1)e^x + be^x + b(x-1)e^x$$
$$= a(x+2)e^x + bxe^x = (a+b)xe^x + 2ae^x$$

$$\varphi(f)(x) = \left(\frac{3a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) x e^x + \left(\frac{3a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\right) e^x$$
$$= \frac{3a+b}{2}(x+1)e^x + \frac{b-a}{2}(x-1)e^x.$$

Donc $\varphi(f) \in E$.

. Ainsi $\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(E)}$

c) On a $\varphi(f_1) : x \mapsto (x+2)e^x$ donc f_1 et $\varphi(f_1)$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi $\boxed{(f_1, \varphi(f_1)) \text{ est libre.}}$

d) D'après 2. b, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi \circ \varphi + \lambda\varphi + \mu \, Id_E = 0_E$,

c'est-à-dire : $\boxed{\forall f \in E, \ \varphi \circ \varphi(f) + \lambda\varphi(f) + \mu f = 0}$

e) On a : $\varphi(f_1) : x \mapsto (x+2)e^x$ et $\varphi \circ \varphi(f_1) : x \mapsto (x+3)e^x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \circ \varphi(f_1)(x) = 2(x+2)e^x - (x+1)e^x$
$= 2\varphi(f_1)(x) - f_1(x)$

Donc $\varphi \circ \varphi(f_1) = 2\varphi(f_1) - f_1$.

Or $\varphi \circ \varphi(f_1) = -\lambda\varphi(f_1) - \mu f_1$.

Donc, par unicité de la décomposition dans la base $(f_1, \varphi(f_1))$, on a : $\boxed{\lambda = -2 \text{ et } \mu = 1.}$

f) Comme $\mu \neq 0$, d'après 2. c,

$\boxed{\varphi \text{ est bijective}}$ et $\varphi^{-1} = -\frac{1}{\mu}(\varphi + \lambda Id_E)$

donc $\boxed{\varphi^{-1} = -(\varphi - 2Id_E)}$

g) On a $\varphi(\varphi^{-1}(f_1)) = f_1$ donc $(\varphi^{-1}(f_1))' = f_1$. Ainsi $\varphi^{-1}(f_1)$ est une primitive de f_1. Or : $\varphi^{-1}(f_1) = -\varphi(f_1) + 2f_1$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(f_1)(x) = -(x+2)e^x + 2(x+1)e^x = xe^x$

Donc $\boxed{x \mapsto xe^x \text{ est une primitive de } f_1.}$

Problème 2 :

1) Soit $x \in \ker u$. On a : $u(x) = 0_F$ donc : $v(x) = w \circ u(x) = w(0_F) = 0_G$.

Ainsi $x \in \ker v$. Donc $\boxed{\ker u \subset \ker v}$

2-a) • Comme $\dim \ker(u) = n - p$, $\ker u$ admet une base composée de $n-p$ vecteurs que l'on note $(e_{p+1}, .., e_n)$.

• Comme $(e_{p+1}, .., e_n)$ est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_1, .., e_p$ tels que : $\boxed{(e_1, .., e_n) \text{ est une base de } E.}$

• D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} u = \dim E - \dim \ker u$

Donc $\boxed{\dim \operatorname{Im} u = p.}$

b) • $(e_1, .., e_n)$ est une base de E donc : $(u(e_1), .., u(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(u)$. Ainsi

$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(u(e_1), .., u(e_n))$$
$$= \operatorname{Vect}(u(e_1), .., u(e_p), 0_F, .., 0_F)$$
$$= \operatorname{Vect}(u(e_1), ..., u(e_p))$$

Donc $(u(e_1), .., u(e_p))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.

• $\operatorname{Card}(u(e_1), .., u(e_p)) = p = \dim \operatorname{Im} u$.

Donc $\boxed{(u(e_1), .., u(e_p)) \text{ est une base de } \operatorname{Im} u.}$

c) • Soit $i \in [\![1, p]\!]$,
$w \circ u(e_i) = w(f_i) = v(e_i)$

• Soit $i \in [\![p+1, n]\!]$, $w \circ u(e_i) = w(0_F) = 0_G = v(e_i)$ car $e_i \in \ker u \subset \ker v$.

Or $(e_1, .., e_n)$ est une base de E et $w \circ u, v \in \mathcal{L}(E, G)$.

Donc : $\boxed{w \circ u = v.}$