CORRECTION
DS 8

Problème 1 :

1) $I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{\frac{x}{2}}\,dx$.

On effectue l'intégration par parties : $u(x) = 1-x$, $u'(x) = -1$, $v'(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $v(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$

$$I_1 = \left[2(1-x)e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 + 2\int_0^1 e^{\frac{x}{2}}\,dx = -2 + 2\left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 = -2+2(2\sqrt{e}-2)$$

Donc $\boxed{I_1 = 4\sqrt{e} - 6}$

2-a) Posons $g : [0,1[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln(1-t)+t$. g est dérivable et $\forall t \in [0,1[$, $g'(t) = -\frac{1}{1-t}+1 = \frac{-t}{1-t} \leq 0$

Donc g est décroissante. Or $g(0)=0$, donc $g \leq 0$.

Ainsi : $\boxed{\forall t \in [0,1[,\ \ln(1-t) \leq -t}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in [0,n[$, alors $\frac{x}{n} \in [0,1[$ et :

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} \leq e^{n(-\frac{x}{n})} = e^{-x}.$$

De plus, pour $x = n$, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 0 \leq e^{-x}$.

Donc : $\forall x \in [0,n]$, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

Donc $I_n \leq \int_0^n e^{-x} e^{\frac{x}{2}}\,dx$.

Or $\int_0^n e^{-x}e^{\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^n e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^n = 2-2e^{-\frac{n}{2}} \leq 2$

Donc : $\boxed{I_n \leq 2}$.

3-a) Posons $h : [0,\frac{1}{2}[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln(1-t)+t+t^2$, h est dérivable et, soit $t \in [0,\frac{1}{2}[$,

$$h'(t) = -\frac{1}{1-t}+1+2t = \frac{-1+(1+2t)(1-t)}{1-t} = \frac{-2t^2+t}{1-t} = \frac{t(1-2t)}{1-t} \geq 0$$

Donc h est croissante. Or $h(0)=0$, donc $h \geq 0$.

Ainsi : $\boxed{\forall t \in [0,\frac{1}{2}[,\ \ln(1-t) \geq -t-t^2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a \in [0, \frac{n}{2}[$, soit $x \in [0, a]$, alors $\frac{x}{n} \in [0, \frac{1}{2}[$ ②

$$(1-\frac{x}{n})^n = e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} \geqslant e^{n(-\frac{x}{n}-\frac{x^2}{n^2})} = e^{-x-\frac{x^2}{n}}$$

Donc $(1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} \geqslant e^{-x-\frac{x^2}{n}} e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{n}} \geqslant e^{-\frac{x}{2}} . e^{-\frac{a^2}{n}}$

D'où : $$\int_0^a (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx \geqslant e^{-\frac{a^2}{n}} \int_0^a e^{-\frac{x}{2}} dx$$

Or $$\int_0^a e^{-\frac{x}{2}} dx = [-2e^{-\frac{x}{2}}]_0^a = 2 - 2e^{-\frac{a}{2}} = 2(1-e^{-\frac{a}{2}})$$

Donc : $$\boxed{\int_0^a (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx \geqslant 2e^{-\frac{a^2}{n}}(1-e^{-\frac{a}{2}}).}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a \in [0, \frac{n}{2}[$.

$$I_n = \int_0^a (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx + \int_a^n (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx$$

Or : $$\int_a^n (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx \geqslant 0 .$$

Donc $$I_n \geqslant \int_0^a (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx .$$

Ainsi : $$\boxed{I_n \geqslant 2e^{-\frac{a^2}{n}}(1-e^{-\frac{a}{2}})}$$

4- Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt[3]{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in [0, \frac{n}{2}[\iff \sqrt[3]{n} \leq \frac{n}{2} \iff n \leq \frac{n^3}{8} \iff 8 \leq n^2 \iff 3 \leq n$.

Soit $n \geqslant 3$, on a : $a_n \in [0, \frac{n}{2}[$ donc :

$$2e^{-\frac{a_n^2}{n}}(1-e^{-\frac{a_n}{2}}) \leq I_n \leq 2$$

Or : $$2e^{-\frac{a_n^2}{n}}(1-e^{-\frac{a_n}{2}}) = 2e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-e^{-\frac{\sqrt[3]{n}}{2}})$$

Ainsi $$\lim_{n\to+\infty} 2e^{-\frac{a_n^2}{n}}(1-e^{-\frac{a_n}{2}}) = 2$$

Donc, par théorème d'encadrement : $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 2.}$$

Problème 2 :

1- • $v - w = (u - Id_E) - (u - 2Id_E)$ donc $\boxed{v - w = Id_E}$

• Soit $x \in E$, $x = Id_E(x) = v(x) - w(x)$. Or $v(x) \in Im\, v$ et $-w(x) \in Im\, w$

Donc $x \in Im\, v + Im\, w$.

Ainsi : $\boxed{E = Im\, v + Im\, w.}$

2-a) • Soit $x \in \ker v \cap \ker w$. On a : $u(x) = x$ et $u(x) = 2x$.

Donc $x = 2x$, ainsi $x = 0_E$. Donc $\ker v \cap \ker w = \{0_E\}$

• Soit $x \in E$.

$v \circ w = (u - Id_E) \circ (u - 2Id_E) = u^2 - 3u + 2Id_E = 0$ d'après $*$.

et, de même, $w \circ v = 0$.

Donc $v(w(x)) = 0_E$ et $w(v(x)) = 0_E$, ainsi $w(x) \in \ker v$ et $v(x) \in \ker w$.

Or : $x = v(x) - w(x)$. Donc $x \in \ker w + \ker v$.

D'où $E = \ker v + \ker w$.

• Ainsi : $\boxed{E = \ker v \oplus \ker w.}$

b- i) Soit $x \in E$, on a : $x = v(x) - w(x)$ avec $v(x) \in \ker w$ et $w(x) \in \ker v$

Donc : $p(x) = p(v(x)) - p(w(x)) = 0_E - w(x) = -w(x)$

Ainsi $\boxed{p = -w.}$

De même $q(x) = q(v(x)) - q(w(x)) = v(x) - 0_E = v(x)$

Donc $\boxed{q = v.}$

ii) $w - 2v = u - 2Id_E - 2(u - Id_E) = -u$

Donc $\boxed{u = 2v - w}$

iii) On a donc $u = 2q + p$.

Or $p \circ q = -w \circ v = 0$ et $q \circ p = -v \circ w = 0$

Donc $p \circ q = q \circ p$. Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton :

$$u^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^j q^j \circ p^{k-j}.$$

Or si $j \geq 1$ et $k-j \geq 1$, $q^j \circ p^{k-j} = q^{j-1} \circ q \circ p \circ p^{k-j-1} = 0$

Donc $u^k = p^k + 2^k q^k$.

De plus p et q sont des projections, ainsi $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$, donc $p^k = p$ et $q^k = q$.

Ainsi : $\boxed{u^k = p + 2^k q}$

3- Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker v$. Soit $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker w$.

Comme $E = \ker v \oplus \ker w$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.

De plus : $\forall x \in \ker v$, $u(x) = x$ et $\forall x \in \ker w$, $u(x) = 2x$.

Donc : $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\ \dim(\ker v) \\ \\ \}\ \dim(\ker w) \end{array}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est diagonale.}}$

4-a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$ Donc $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ainsi : $$U^2 - 3U + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où : $U^2 - 3U + 2I_3 = O_3$.

Ainsi : $\boxed{u^3 - 3u + 2\,\mathrm{Id}_E = 0.}$

b) On a : $V = U - I_3$ et $W = U - 2I_3$ donc :

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

- $(x,y,z) \in \ker v \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker V \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Donc $\ker v = \{(x,0,x),\ x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u_1)$ où $u_1 = (1,0,1)$.

Comme $u_1 \neq (0,0,0)$, $\boxed{(u_1) \text{ est une base de } \ker v.}$

• $(x,y,z) \in \ker w \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker W \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x+y=0$

$\Leftrightarrow x = y.$

Donc $\ker w = \{(x,x,z),\ x,z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u_2,u_3)$ où $u_2 = (1,1,0)$
$u_3 = (0,0,1)$

Comme u_2 et u_3 ne sont pas colinéaires. Alors (u_2,u_3) est libre.

Donc $\boxed{(u_2,u_3) \text{ est une base de } \ker w.}$

d) Comme $E = \ker v \oplus \ker w$, $\mathcal{B}' = (u_1,u_2,u_3)$ est une base de E.

De plus $u(u_1) = u_1$, $u(u_2) = 2u_2$ et $u(u_3) = 2u_3$.

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$ diagonale.

De plus : $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')\,\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)\,\text{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')^{-1}$

Posons $P = \text{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')$, alors P est inversible et :

$$\boxed{U = PDP^{-1}.}$$

e) • <u>Méthode 1</u> : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$U^k = PD^kP^{-1}$ et comme D diagonale $D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$

De plus : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

Donc : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2^k & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 1 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2^k-1 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 1-2^k & 2^k-1 & 2^k \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc $\boxed{U^k = \begin{pmatrix} 1 & 2^k-1 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 1-2^k & 2^k-1 & 2^k \end{pmatrix}}$

- Méthode 2 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après 2b.iii.

$$U^k = -W + 2^k V = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

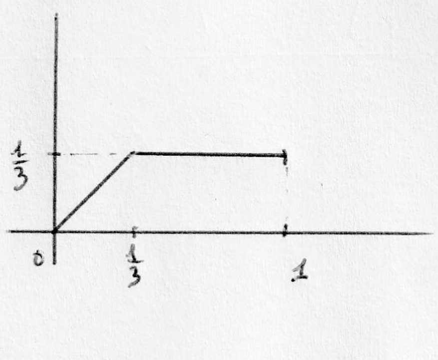
Donc $\boxed{U^k = \begin{pmatrix} 1 & 2^k-1 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 1-2^k & 2^k-1 & 2^k \end{pmatrix}}$

Problème 3 :

1- H est une primitive de h, donc H est dérivable et $H' = h \in E$.

Ainsi $\boxed{H \in \mathcal{C}^1([0,1]) \text{ et } H' = h.}$

2-a) $\min\left(\frac{1}{3}, t\right) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } t \geq \frac{1}{3} \\ t & \text{sinon} \end{cases}$



b) $\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3},t\right)dt = \int_0^{\frac{1}{3}} t\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{3}\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{18}+\frac{2}{9}$

Donc $\boxed{\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3},t\right)dt = \frac{5}{18}}$

c) $\int_0^1 \min(x,t)\,dt = \int_0^x t\,dt + \int_x^1 x\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x + x(1-x) = \frac{x^2}{2}+x-x^2$

Donc $\boxed{\int_0^1 \min(x,t)\,dt = x - \frac{x^2}{2}}$

3-a) Soit $x \in [0,1]$, $F(x) = \int_0^x t f(t)\,dt + \int_x^1 x f(t)\,dt = \int_0^x t f(t)\,dt - x\int_1^x f(t)\,dt$

Or, d'après 2, $x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt$ et $x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Donc $\boxed{F \in \mathcal{C}^1([0,1])}$

De plus, $F'(x) = xf(x) - \left(\int_1^x f(t)\,dt + x f(x)\right) = -\int_1^x f(t)\,dt$

Donc : $\boxed{F'(x) = \int_x^1 f(t)\,dt.}$

b) . $F(0) = \int_0^1 \min(0,t) f(t)\,dt = \int_0^1 0\cdot f(t)\,dt$ donc $\boxed{F(0)=0}$.

. $F'(1) = \int_1^1 f(t)\,dt$ donc $\boxed{F'(1) = 0}$

c) . $x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ est $\mathcal{C}^1$ d'après 1. donc F' est $\mathcal{C}^1$, ainsi :

$\boxed{F \in \mathcal{C}^2([0,1])}$

. Soit $x \in [0,1]$, $F'(x) = -\int_1^x f(t)\,dt$ donc $F''(x) = -f(x)$.

Ainsi $\boxed{F'' = -f.}$

4- . Soit $f,g \in E$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [0,1]$

$T(\lambda f+\mu g)(x) = \int_0^1 \min(x,t)(\lambda f+\mu g)(t)\,dt = \lambda\int_0^1 \min(x,t) f(t)\,dt + \mu\int_0^1 \min(x,t) g(t)\,dt$

$= \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x)$

Donc $T(\lambda f+\mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$.

. De plus, d'après 3-c, $T(f) \in \mathcal{C}^2([0,1])$ donc $T(f) \in E$, pour $f \in E$.

Ainsi $\boxed{T \in \mathcal{L}(E)}$

5- Soit $f \in \ker T$. On a $T(f) = 0$.

Or, d'après 3-c, $T(f)'' = -f$. Donc $-f = 0$, d'où $f = 0$.

Donc $\ker T = \{0\}$. Ainsi $\boxed{T \text{ est injective.}}$

6-a) Soit $f \in E$, d'après 4-c, $T(f) \in \mathcal{C}^2([0,1])$

et d'après 4-e, $T(f)(0) = 0$ et $T(f)'(1) = 0$

Donc $T(f) \in A$. Ainsi : $\forall f \in E,\ T(f) \in A$.

Donc : $\boxed{\operatorname{Im} T \subset A.}$

b) Soit $x \in [0,1]$,

$$T(G'')(x) = \int_0^1 \min(x,t)\, G''(t)\,dt = \int_0^x t\, G''(t)\,dt + \int_x^1 x\, G''(t)\,dt$$

Or : • $\int_x^1 x G''(t)\,dt = x \int_x^1 G''(t)\,dt = x\left[G'(t)\right]_x^1 = x\left(G'(1) - G'(x)\right) = -x\,G'(x)$

• Par intégration par parties :

$$\int_0^x t\,G''(t)\,dt = \left[t\,G'(t)\right]_0^x - \int_0^x G'(t)\,dt = x\,G'(x) - \left[G(t)\right]_0^x$$
$$= x\,G'(x) - G(x) + G(0) = x\,G'(x) - G(x).$$

Donc $T(G'')(x) = -G(x)$. Ainsi : $\boxed{T(G'') = -G}$

c) Soit $G \in A$, on a : $G = T(-G'')$ Or $-G'' \in E$.

Donc $G \in \operatorname{Im} T$. Ainsi $A \subset \operatorname{Im} T$.

Donc $\boxed{\operatorname{Im} T = A}$

d) On a : $\operatorname{Im} T \neq E$.

Donc $\boxed{T \text{ n'est pas surjective.}}$

Problème 4 :

Partie 1 :

1- Soit $k \in \mathbb{N}$,

- soit $x \in \mathcal{N}_k$. On a $f^k(x) = 0_E$ donc $f^{k+1}(x) = f(0_E) = 0_E$. Ainsi $x \in \mathcal{N}_{k+1}$.

  Donc $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}$

- soit $y \in \mathcal{I}_{k+1}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x))$. Donc $y \in \mathcal{I}_k$.

  Ainsi $\mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}_k$.

Donc $\boxed{(\mathcal{N}_k) \text{ est croissante et } (\mathcal{I}_k) \text{ est décroissante pour l'inclusion}}$

2- Soit $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}$ donc $\dim \mathcal{N}_k \leq \dim \mathcal{N}_{k+1}$.

Donc $\boxed{(\dim \mathcal{N}_k) \text{ est une suite croissante d'entiers naturels.}}$

3- Supposons que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_q \neq \mathcal{N}_{q+1}$.

Soit $q \in \mathbb{N}$, on a : $\mathcal{N}_q \subset \mathcal{N}_{q+1}$ et $\mathcal{N}_q \neq \mathcal{N}_{q+1}$ donc $\dim \mathcal{N}_q < \dim \mathcal{N}_{q+1}$.

Ainsi $1 \leq \dim \mathcal{N}_{q+1} - \dim \mathcal{N}_q$.

Donc : $\sum_{q=0}^{n} 1 \leq \sum_{q=0}^{n} (\dim \mathcal{N}_{q+1} - \dim \mathcal{N}_q)$.

Ainsi, par télescopage : $n+1 \leq \dim \mathcal{N}_{n+1} - \dim \mathcal{N}_0$.

Or $\dim \mathcal{N}_0 = \dim \ker Id_E = 0$ donc $n+1 \leq \dim \mathcal{N}_{n+1}$.

Or $\mathcal{N}_{n+1} \subset E$ donc $\dim \mathcal{N}_{n+1} \leq n$ ce qui est absurde.

Ainsi, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.

et $\boxed{\min(q \in \mathbb{N},\ \mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}) \text{ convient.}}$

4- On a : $\mathcal{I}_{q+1} \subset \mathcal{I}_q$ et $\dim \mathcal{I}_{q+1} = n - \dim \mathcal{N}_{q+1}$ d'après le théorème du rang

$= n - \dim \mathcal{N}_q$

$= \dim \mathcal{I}_q$ "

Donc : $\boxed{\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}.}$

5- Soit $x \in \mathcal{N}_q \cap \mathcal{I}_q$. Alors $f^q(x) = 0_E$ et il existe $z \in E$ tel que $x = f^q(z)$.

Donc $f^{2q}(z) = 0$ ainsi $z \in \mathcal{N}_{2q}$

Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_{q+k} = \mathcal{N}_q$.

- Pour $k=0$, $\mathcal{N}_{q+k} = \mathcal{N}_{q+0} = \mathcal{N}_q$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{N}_{q+k} = \mathcal{N}_q$.

  On a, $\mathcal{N}_q \subset \mathcal{N}_{q+k+1}$.

  De plus, soit $x \in \mathcal{N}_{q+k+1}$. $f^{q+k+1}(x) = 0_E$ donc $f^{q+k}(f(x)) = 0_E$

  Ainsi $f(x) \in \mathcal{N}_{q+k} = \mathcal{N}_q$. Donc $f^q(f(x)) = 0_E$. Ainsi $f^{q+1}(x) = 0_E$.

  Donc $x \in \mathcal{N}_{q+1} = \mathcal{N}_q$. Donc $\mathcal{N}_{q+k+1} = \mathcal{N}_q$.

- Ainsi par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_{q+k} = \mathcal{N}_q$.

Donc $z \in \mathcal{N}_{2q} = \mathcal{N}_{q+q} = \mathcal{N}_q$. Ainsi $f^q(z) = 0_E$. Donc $x = 0_E$.

D'où : $\mathcal{N}_q \cap \mathcal{I}_q = \{0_E\}$.

- D'après le théorème du rang : $\dim \mathcal{N}_q + \dim \mathcal{I}_q = \dim E$.

  Donc : $\boxed{\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E.}$

6-a) On a : $\varphi_k : \mathcal{I}_k \to E$
$x \mapsto f(x)$.

- D'après le théorème du rang : $\dim \mathcal{I}_k = \dim \ker \varphi_k + \dim \operatorname{Im} \varphi_k$.
- Soit $x \in E$, $x \in \ker \varphi_k \iff x \in \mathcal{I}_k$ et $\varphi_k(x) = 0_E$
  $\iff x \in \mathcal{I}_k$ et $f(x) = 0_E$
  $\iff x \in \mathcal{I}_k \cap \ker f$.

  Donc $\ker \varphi_k = \mathcal{I}_k \cap \ker f$.

- Soit $y \in E$, $y \in \operatorname{Im} \varphi_k \iff \exists x \in \mathcal{I}_k, \ y = \varphi_k(x)$
  $\iff \exists x' \in E, \ y = f(f^k(x'))$
  $\iff \exists x' \in E, \ y = f^{k+1}(x')$
  $\iff y \in \mathcal{I}_{k+1}$.

  Donc $\operatorname{Im} \varphi_k = \mathcal{I}_{k+1}$.

  Ainsi : $\boxed{\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim(\mathcal{I}_k \cap \ker f)}$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$,

$\dim \mathcal{N}_{k+2} - \dim \mathcal{N}_{k+1} = (\dim E - \dim \mathcal{I}_{k+2}) - (\dim E - \dim \mathcal{I}_{k+1})$ d'après le théorème du rang

$= \dim \mathcal{I}_{k+1} - \dim \mathcal{I}_{k+2}$

$= \dim \mathcal{I}_{k+1} \cap \ker f$.

Or : $\mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}_k$ donc :

$$\dim \mathcal{N}_{k+2} - \dim \mathcal{N}_{k+1} \leq \dim \mathcal{I}_k \cap \ker f$$
$$\leq \dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1}$$
$$\leq (\dim E - \dim \mathcal{N}_k) - (\dim E - \dim \mathcal{N}_{k+1})$$
$$\leq \dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k .$$

Donc $\boxed{(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k) \text{ est décroissante.}}$

Partie 2.

7-a) On a : $v : \operatorname{Im}(u^r) \longrightarrow E$
$x \longmapsto u^s(x)$.

Soit $y \in E$, $y \in \operatorname{Im} v \iff \exists x \in \operatorname{Im}(u^r),\ y = v(x)$
$\iff \exists x' \in E,\ y = u^s(u^r(x))$
$\iff \exists x' \in E,\ y = u^{s+r}(x)$.

Donc $\boxed{\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(u^{s+r})}$

b) Soit $x \in \ker v$. Alors $v(x) = 0_E$ donc $u^s(x) = 0_E$. Ainsi $x \in \ker(u^s)$.

Donc : $\boxed{\ker(v) \subset \ker(u^s)}$.

c) D'après le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Im}(u^r) = \dim \ker v + \dim \operatorname{Im} v$$

Donc $\dim E - \dim(\ker u^r) \leq \dim \ker(u^s) + \dim \operatorname{Im}(u^{s+r})$
$\leq \dim \ker(u^s) + \dim E - \dim \ker(u^{s+r})$

Donc $\boxed{\dim \ker(u^{s+r}) \leq \dim \ker(u^s) + \dim \ker(u^r)}$

d) Soit $i \in \mathbb{N}$, on a : $\dim \ker(u^{r+1}) \leq \dim(\ker u^r) + \dim(\ker u)$

Or $\dim \ker u = \dim E - rg(u) = n - (n-1) = 1$

donc $\dim \ker(u^{r+1}) - \dim(\ker u^r) \leq 1$

D'où : $\displaystyle\sum_{r=0}^{i-1} (\dim \ker(u^{r+1}) - \dim(\ker u^r)) \leq \sum_{r=0}^{i-1} 1$

Donc, par somme télescopique : $\dim \ker(u^i) - \dim \ker Id_E \leq i$

Ainsi $\boxed{\dim \ker(u^i) \leq i.}$

8-a) . Pour $i=1$, $\dim \ker(u^i) = \dim \ker u = n - \operatorname{rg} u = 1$.

. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$, supposons que $\dim \ker(u^i) = i$

On a : $\dim \ker(u^{i+1}) \geq \dim \ker(u^i)$, donc $\dim \ker u^{i+1} \geq i$.

. Supposons que $\dim \ker u^{i+1} = i$

Alors $\dim \ker u^{i+1} = \dim \ker u^i$ et $\ker u^i \subset \ker u^{i+1}$.

Donc $\ker u^i = \ker u^{i+1}$.

Ainsi, de même qu'en 5., $\forall k \in \mathbb{N}$, $\ker u^{i+k} = \ker u^i$.

En particulier $\ker u^i = \ker u^n = E$.

Donc $i = \dim \ker u^i = \dim E = n$ ce qui est absurde.

. Ainsi $\dim \ker u^{i+1} \neq i$ donc $\dim \ker u^{i+1} \geq i+1$.

. Or, d'après 7-d $\dim \ker(u^{i+1}) \leq i+1$, donc :

$$\dim \ker u^{i+1} = i+1.$$

. Donc, par récurrence finie :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \ \dim(\ker u^i) = i.}$$

b) Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\dim(\ker u^i) = i \neq \dim E$ donc $u^i \neq 0$

De plus, comme $U^n = 0$, alors $u^n = 0$.

Donc $\boxed{\text{l'indice de nilpotence de } u \text{ est } n}$

c). On a donc $u^{n-1} \neq 0$, ainsi, il existe $e \in E$ tel que $u^{n-1}(e) \neq 0_E$.

. Montrons que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ est libre.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(e) = 0_E$.

Alors $u^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(e)\right) = u^{n-1}(0_E)$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^{n-1+k}(e) = 0_E$.

Or, si $k \geq 1$, $n-1+k \geq n$ donc $u^{n-1+k} = 0$.

Ainsi $\lambda_0 u^{n-1}(e) = 0_E$ donc $\lambda_0 = 0$.

Ainsi, en réitérant $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

Donc $\mathcal{B}_e$ est libre.

- Comme $\mathrm{Card}\, \mathcal{B}_e = n = \dim E$,

$\boxed{\mathcal{B}_e \text{ est une base de } E}$

d) On a : Soit $j \in [\![1, n]\!]$, $u(u^{j-1}(e)) = u^j(e) = \begin{cases} u^{j+1-1}(e) & \text{si } j<n. \\ 0 & \text{si } j=n \end{cases}$

Donc : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_e}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 & \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

9 - • Soit U une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à u. Montrons que $U^n = 0$.

Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$; on a donc $\mathcal{N}_p = E = \mathcal{N}_{p+1}$.

Soit q le plus petit entier naturel tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$, on a alors $q \leq p$.

D'après 5, $\forall l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_{q+l} = \mathcal{N}_q$ donc $\mathcal{N}_p = \mathcal{N}_q$.

Ainsi $\mathcal{N}_q = E$ donc $u^q = 0$.

De plus, d'après 3, $q \leq n$, donc $u^n = 0$. D'où $U^n = 0$.

Ainsi, d'après 8, U est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

• Donc deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$ sont semblables à

$\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $\boxed{\text{elles sont semblables.}}$