Devoir à la maison n° 11 :

A rendre pour le : lundi 28 avril

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

1. On considère l'application :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right). \end{array}$$
On pose $u=(1,0)$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que la famille $(u, f(u))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Calculer $(f\circ f-2f)(u)$ et $(f\circ f-2f)(f(u))$. En déduire $f\circ f-2f$.
   (d) Montrer que f est bijective et que :
$$f^{-1}=2Id_{\mathbb{R}^2}-f.$$
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
Soit $\varphi\in\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $u\in E$ tel que la famille $(u,\varphi(u))$ soit libre.
   (a) Montrer que $(u,\varphi(u))$ est une base de E.
   (b) Montrer qu'il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que :
$$\varphi\circ\varphi+\lambda\varphi+\mu Id_E=0_E.$$
   (c) Si $\mu\neq 0$, montrer que $\varphi\in GL(E)$ et déterminer φ^{-1}.
   (d) Si $\mu=0$, montrer que $\varphi\notin GL(E)$ ou que φ est une homothétie.
3. Soient :
$$E=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \exists a,b\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=a(x+1)e^x+b(x-1)e^x\},$$
et :
$$\varphi : f\mapsto f'.$$
   (a) Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.
   (b) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
   (c) On pose : $f_1 : x\mapsto (x+1)e^x$. Montrer que $(f_1,\varphi(f_1))$ est libre.
   (d) En déduire qu'il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que :
$$\forall f\in E, \varphi\circ\varphi(f)+\lambda\varphi(f)+\mu f=0.$$
   (e) Déterminer λ et μ.
   (f) Montrer que φ est bijective et calculer φ^{-1}.
   (g) En déduire une primitive de f_1.

T.S.V.P.

Problème 2 :
Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(E,G)$.
Le but de ce problème est de montrer que :

$$\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v) \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F,G),\ v = w \circ u.$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ tel que $v = w \circ u$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$.
2. On suppose que $\dim E = n$, $\dim \mathrm{Ker}\,(u) = n - p$ et $\dim F = r$.
   (a) Justifier pourquoi on peut choisir $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ base de E de sorte que $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$. Quelle est alors la dimension de $\mathrm{Im}\,(u)$?
   (b) Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$.
   (c) On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{i \in [\![1,r]\!]}$ soit une base de F. On définit alors $w \in \mathcal{L}(F,G)$ par :

$$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que, si $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$, alors $v = w \circ u$.