Samedi 3 mai

4 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé,
il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition
en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1 :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx.$$

Le but de ce problème est de montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 2.

1. Calculer I_1 .
2. (a) Montrer que :

$$\forall t \in [0, 1[, \ln(1-t) \leq -t.$$

- (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \leq 2.$$

3. (a) Montrer que :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \ln(1-t) \geq -t - t^2.$$

- (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \left[0, \frac{n}{2}\right], \int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx \geq 2e^{-a^2/n} (1 - e^{-a/2}).$$

- (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \left[0, \frac{n}{2}\right], I_n \geq 2e^{-a^2/n} (1 - e^{-a/2}).$$

4. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 2.
On pourra choisir judicieusement une valeur de a dépendant de n .

Problème 2 :

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E , tel que :

$$u^2 - 3u + 2\text{id}_E = 0 \quad (\star)$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$.

On pose $v = u - \text{id}_E$ et $w = u - 2\text{id}_E$.

1. Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \text{Im}(v) + \text{Im}(w)$.
2. (a) Démontrer que $E = \text{Ker}(v) \oplus \text{Ker}(w)$.
(b) Soit p la projection sur $\text{Ker}(v)$ parallèlement à $\text{Ker}(w)$ et soit q la projection sur $\text{Ker}(w)$ parallèlement à $\text{Ker}(v)$.
 - i. Exprimer p et q en fonction de v et w .
 - ii. Exprimer u en fonction de p et q .
 - iii. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer u^k en fonction de p , q et k .
3. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale?

4. Application

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit

l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Vérifier que u satisfait à la relation $(\star)$. On fera apparaître les calculs sur la copie.
- (b) Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question 3.
- (c) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $\text{Ker}(v)$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\text{Ker}(w)$.
- (d) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.
- (e) En déduire l'expression matricielle de U^k pour $k \in \mathbb{N}^*$. On proposera deux méthodes différentes pour répondre à cette question.

Problème 3 :

On note $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On rappelle que, pour tout $(x, t) \in [0, 1]^2$, on note $\min(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq t \\ t & \text{sinon} \end{cases}$.

Question préliminaire

1. Soient $h \in E$ et $a \in [0, 1]$. Justifier que la fonction $H : x \mapsto \int_a^x h(t) dt$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, et déterminer sa dérivée.

Cas particuliers

2. (a) Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \min\left(\frac{1}{3}, t\right)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
 (b) Calculer $\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right) dt$.
 (c) Soit x un réel de $[0, 1]$. Exprimer $\int_0^1 \min(x, t) dt$ en fonction de x .

Une relation fonctionnelle

3. Soit $f \in E$.
 (a) Justifier que $F : x \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$ définit une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ et, pour tout $x \in [0, 1]$, calculer $F'(x)$.
 (b) Calculer $F(0)$ et $F'(1)$.
 (c) Démontrer alors que F est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et que $F'' = -f$.

Noyau et image d'un endomorphisme

A toute fonction f de E , on associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt.$$

4. Montrer que T est un endomorphisme de E .
 5. L'application T est-elle injective?
 6. On pose $A = \{G \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid G(0) = G'(1) = 0\}$.
 (a) Montrer que $\text{Im}(T) \subset A$.
 (b) Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.
 (c) Déterminer $\text{Im}(T)$.
 (d) L'application T est-elle surjective?

Problème 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$. Le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f .

Partie 1 : Noyaux itérés

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.
4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.
5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$.
6. On considère pour tout entier naturel k , φ_k la restriction de f à $\mathcal{I}_k$.
 - (a) Montrer que $\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim(\text{Ker}(f) \cap \mathcal{I}_k)$.
 - (b) En déduire que la suite $(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$ canoniquement associé à U .

7. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.
 - (a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.
 - (b) Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.
 - (c) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.
 - (d) En déduire que pour tout entier naturel i , $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.
8. On suppose de plus que $U^n = 0$.
 - (a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$.
 - (b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n .
 - (c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ soit une base de E .
 - (d) Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$.
9. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n - 1$ sont semblables.