CORRECTION
DM 10

Problème 1 :

1-a) $S_{3,2}$ est le nombre de partitions d'un ensemble $\{x_1, x_2, x_3\}$ à 3 éléments en 2 parties.

Ces partitions sont : $\{\{x_1\}, \{x_2, x_3\}\}$, $\{\{x_2\}, \{x_1, x_3\}\}$ et $\{\{x_3\}, \{x_1, x_2\}\}$.

Donc $\boxed{S_{3,2} = 3}$

b) • Un ensemble $\{x_1, .., x_n\}$ à n éléments admet une unique partition en 1 partie qui est $\{\{x_1, .., x_n\}\}$ donc : $\boxed{S_{n,1} = 1}$

• Un ensemble $\{x_1, .., x_n\}$ à n éléments admet une unique partition en n parties qui est $\{\{x_1\}, .., \{x_n\}\}$ donc : $\boxed{S_{n,n} = 1}$

2-a-i) Les partitions de E en deux parties dont l'une est le singleton $\{4\}$ sont :

$$\boxed{\{\{1,2,3\}, \{4\}\}}$$

ii) Les partitions de E en deux parties dont l'une contient 4 tout en étant différentes du singleton $\{4\}$ sont :

$$\boxed{\begin{array}{l}\{\{1\}, \{2,3,4\}\}, \{\{2\}, \{1,3,4\}\}, \{\{3\}, \{1,2,4\}\}, \{\{1,2\}, \{3,4\}\}, \\ \{\{1,3\}, \{2,4\}\} \text{ et } \{\{1,4\}, \{2,3\}\}\end{array}}$$

iii) • Les partitions de E en deux parties sont la réunion disjointe des deux cas précédents ainsi $S_{n,k} = S_{4,2} = 1 + 6 = 7$

• $S_{n-1,k-1} = S_{3,1} = 1$ d'après 1.b

• $S_{n-1,k} = S_{3,2} = 3$ d'après 1.a

Ainsi $\boxed{S_{n,k} = 1 + 2 \times 3 = S_{n-1,k-1} + k S_{n-1,k}}$

b-i) Choisir une partition de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$ revient à choisir une partition de $E \setminus \{x_n\}$ en k-1 parties. Il y en a donc :

$$\boxed{S_{n-1,k-1}}$$

ii) Une partition de E en k parties dont l'une contient x_n tout en étant différente du singleton $\{x_n\}$ est entièrement déterminée par :

- choix d'une partition de $E \setminus \{x_n\}$ en k parties : $S_{n-1,k}$ possibilités.
- choix de la partie à laquelle on ajoute x_n : k possibilités

Soit $\boxed{k\, S_{n-1,k} \text{ possibilités}}$

iii) L'ensemble des partitions de E en k parties est la réunion disjointe des deux cas précédents. Donc : $\boxed{S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k\, S_{n-1,k}.}$

Problème 2 :

1- a) • Choix de la position des 3 voix A : $\binom{5}{3}$ possibilités

• Choix de la position des 2 voix B : 1 possibilité.

Soit $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ possibilités.

Il y a donc : $\boxed{\text{10 dépouillements possibles.}}$

b). On remarque qu'un dépouillement vérifiant P ne peut pas commencer par B car alors B aurait plus de voix que A à la première étape.

• Les dépouillements commençant par A sont :

AAABB, AABAB, ~~AABBA~~, ~~ABAAB~~, ~~ABABA~~ et ~~ABBAA~~

Il y a donc 2 dépouillements vérifiant P :

$\boxed{\text{AAABB et AABAB.}}$

2-a) . Choix de la position des m voix A : $\binom{m+n}{m}$ possibilités.

. Choix de la position des n voix B : 1 possibilité.

Donc le nombre de dépouillements possibles est

$$\boxed{\binom{m+n}{m}}$$

b) Un dépouillement commençant par B revient au choix des $m+n-1$ bulletins restants c'est-à-dire d'un dépouillement avec m voix pour A et $n-1$ pour B, il y en a donc :

$$\boxed{\binom{m+n-1}{m}}$$

c) Un dépouillement vérifiant P ne peut pas commencer par B.

Or le nombre de dépouillement ne commençant pas par B est

$$\binom{m+n}{m} - \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{m-1}$$ d'après le triangle de Pascal.

Donc $\boxed{\text{le nombre de dépouillement vérifiant P est inférieur ou égal à } \binom{m+n-1}{m-1}}$