CORRECTION DM 11

Question préliminaire :

$$\sum_{i=0}^{p} E(X|Y=i)\,P(Y=i) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k|Y=i)\,P(Y=i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \sum_{i=0}^{p} P(X=k|Y=i)\,P(Y=i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k)$$ d'après la formule des probabilités totales car $(X=i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ est un système complet d'événements.

Donc : $$\boxed{\sum_{i=0}^{p} E(X|Y=i)\,P(Y=i) = E(X).}$$

Partie 1 :

1-a) • $U(\Omega) = V(\Omega) = [\![0,3]\!]$.

• Soit $(i,j) \in [\![0,3]\!]^2$, comme U et V sont indépendantes :

$$P((U,V)=(i,j)) = P((U=i)\cap(V=j)) = P(U=i).P(V=j) = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

• Donc $\boxed{(U,V) \sim \mathcal{U}([\![0,3]\!]^2)}$

b) • $U(\Omega) = M(\Omega) = [\![0,3]\!]$.

• Soit $(i,j) \in [\![0,3]\!]$.

• Comme $U \le M$, si $i > j$, $P((U,M)=(i,j)) = 0$.

• Si $i < j$, $P((U,M)=(i,j)) = P((U=i)\cap(V=j)) = \frac{1}{16}$.

• Si $i=j$, $P((U,M)=(i,j)) = P((U=i)\cap(V\le i))$

$= P(U=i).P(V\le i)$ car U et V indépendantes

$= \frac{1}{4}.\frac{i+1}{4} = \frac{i+1}{16}$

Ainsi :

$U \backslash M$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	0	$\frac{4}{16}$

. En sommant sur les colonnes :

j	0	1	2	3
$P(M=j)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

et $E(M) = \sum_{j=0}^{3} j\,P(M=j) = \frac{3}{16} + 2.\frac{5}{16} + 3.\frac{7}{16} = \frac{34}{16}$. Donc $\boxed{E(M) = \frac{17}{8}}$

2-a) $\sum_{k=i+1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{i} k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$.

Donc : $\boxed{\sum_{k=i+1}^{n} k = \frac{n(n+1) - i(i+1)}{2}}$

b) . Pour $n=0$, $\sum_{i=0}^{n} i^2 = 0 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

. Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

c) $E(M|U=n) = \sum_{k=0}^{n} k\,P(M=k|U=n) = n\,P(M=n|U=n)$ car $U \leq M$

$= n.1$ car sachant $U=n$, on a $M=n$.

Donc $\boxed{E(M|U=n) = n.}$

d) i) $E(M|U=i) = \sum_{k=0}^{n} k\,P(M=k|U=i)$

Or $U \leq M$ donc, si $k<i$, $P(M=k|U=i)=0$.

Donc $E(M|U=i) = \sum_{k=i}^{n} k\,P(M=k|U=i)$

Ainsi $\boxed{E(M|U=i) = i\,P(M=i|U=i) + \sum_{k=i+1}^{n} k\,P(M=k|U=i)}$

ii) . Soit $k \in [\![i+1, n]\!]$,

$$P(M=k \mid U=i) = P(V=k \mid U=i) = P(V=k)$$ car U et V sont indépendantes.

Donc $$\boxed{P(M=k \mid U=i) = \frac{1}{n+1}}.$$

. $$\sum_{k=i+1}^{n} k\,P(M=k \mid U=i) = \sum_{k=i+1}^{n} \frac{k}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=i+1}^{n} k = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n(n+1) - i(i+1)}{2}\right)$$

Donc $$\boxed{\sum_{k=i+1}^{n} k\,P(M=k \mid U=i) = \frac{n}{2} - \frac{i(i+1)}{2(n+1)}}$$

iii) $$P(M=i \mid U=i) = P(V \leq i \mid U=i) = P(V \leq i)$$ car U et V indépendantes.

Donc $$\boxed{P(M=i \mid U=i) = \frac{i+1}{n+1}}.$$

e) . si $i=n$ $\quad E(M \mid U=i) = n$

. si $i<n$, $$E(M \mid U=i) = i\,\frac{i+1}{n+1} + \frac{n}{2} - \frac{i(i+1)}{2(n+1)} = \frac{i(i+1)}{2(n+1)} + \frac{n}{2}$$

Donc, dans tous les cas : $$E(M \mid U=i) = \frac{i(i+1)}{2(n+1)} + \frac{n}{2}.$$

. $$E(M) = \sum_{i=0}^{n} E(M \mid U=i)\,P(U=i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i(i+1)}{2(n+1)} + \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)^2} \left(\sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i\right) + \frac{n}{2(n+1)} \sum_{i=0}^{n} 1.$$

$$= \frac{1}{2(n+1)^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{n}{2(n+1)}(n+1).$$

$$= \frac{1}{12(n+1)} \left(n(2n+1) + 3n + 6n(n+1)\right)$$

$$= \frac{n\,(2n+1+3+6(n+1))}{12(n+1)} = \frac{n(8n+10)}{12(n+1)}$$

Donc $$\boxed{E(M) = \frac{n(4n+5)}{6(n+1)}}$$

. Pour $n=3$, $$\frac{n(4n+5)}{6(n+1)} = \frac{3 \times 17}{6 \times 4} = \frac{17}{8}$$ ce qui est cohérent avec le résultat de 1.

1) Comme il y a c boules noires, on a : $\boxed{Y_N(\Omega) = [\![0, c]\!]}$

2) Sachant $(X_1 = 1)$, la première boule tirée est blanche donc : $Y_N = 0$.

Ainsi $\boxed{E(Y_N \mid X_1 = 1) = 0}$

3) Soit $i \in [\![1, c]\!]$, sachant $X_1 = 0$, la 1ère boule tirée est noire. Ainsi, en commençant au 2e tirage, on peut considérer que l'urne contient b boules blanches et $c-1$ boules noires donc $N-1$ boules en tout. Donc :

$$\boxed{P(Y_N = i \mid X_1 = 0) = P(Y_{N-1} = i-1).}$$

4)
$$\begin{aligned}
E(Y_N \mid X_1 = 0) &= \sum_{i=0}^{c} i P(Y_N = i \mid X_1 = 0) \\
&= \sum_{i=1}^{c} i\, P(Y_{N-1} = i-1) \underset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{c-1} (j+1) P(Y_{N-1} = j) \\
&= \sum_{j=0}^{c-1} j\, P(Y_{N-1} = j) + \sum_{j=0}^{c-1} P(Y_{N-1} = j) \\
&= E(Y_{N-1}) + 1.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E(Y_N \mid X_1 = 0) = u_{N-1} + 1.}$

5) Soit $N > b$,

$$\begin{aligned}
E(Y_N) &= \sum_{i=0}^{1} E(Y_N \mid X_1 = i) P(X_1 = i) \\
&= E(Y_N \mid X_1 = 0) P(X_1 = 0) + E(Y_N \mid X_1 = 1) P(X_1 = 1)
\end{aligned}$$

Donc
$$\begin{aligned}
u_N &= E(Y_N \mid X_1 = 0) P(X_1 = 0) \\
&= (u_{N-1} + 1) \frac{c}{N} + 0
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{u_N = (u_{N-1} + 1) \frac{N-b}{N}}$

6) . Dans le cas $N = b$, il n'y a pas de boule noire dans l'urne donc $Y_b = 0$.

Ainsi $\boxed{u_b = 0}$

. $u_{b+1} = (u_b + 1) \frac{1}{b+1}$ donc $\boxed{u_{b+1} = \frac{1}{b+1}}$

. $u_{b+2} = (u_{b+1} + 1) \frac{2}{b+2} = \left(\frac{b+2}{b+1}\right) \frac{2}{b+2}$ donc $\boxed{u_{b+2} = \frac{2}{b+1}}$

7) Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $E(Y_{b+k}) = \frac{k}{b+1}$.

- Pour $k=0$, $E(Y_{b+k}) = E(Y_b) = 0 = \frac{k}{b+1}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $E(Y_{b+k}) = \frac{k}{b+1}$.

$$E(Y_{b+k+1}) = u_{b+k+1} = (1+u_{b+k})\frac{k+1}{b+k+1} = \left(1+\frac{k}{b+1}\right)\frac{k+1}{b+k+1}$$

$$= \frac{b+1+k}{b+1} \cdot \frac{k+1}{b+k+1} = \frac{k+1}{b+1}.$$

- Donc, par récurrence : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ E(Y_{b+k}) = \frac{k}{b+1}}$.

Partie 3 :

1). C représente le nombre de succès (la question est réussie) lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes (chaque question) chacune ayant une probabilité $\frac{b}{N}$ de réussir (d'être réussie). Ainsi $\boxed{C \sim \mathcal{B}(n, \frac{b}{N})}$

- Ainsi $\boxed{E(C) = \frac{nb}{N}}$.

2) - Sachant $(C=\ell)$, l'étudiant répond au hasard à $n-\ell$ questions. Donc D représente le nombre de succès lors de la répétition de $n-\ell$ expériences de Bernoulli indépendantes, chacune ayant la probabilité $\frac{1}{4}$ de réussir,

donc, $\boxed{\text{sachant } (C=\ell),\ D \sim \mathcal{B}(n-\ell, \frac{1}{4})}$

- Ainsi $E(D|C=\ell) = \sum_{i=0}^{n-\ell} i\,P(D=i|C=\ell)$

Donc, d'après l'espérance d'une loi binomiale : $\boxed{E(D|C=\ell) = \frac{n-\ell}{4}}$.

3) - $E(D) = \sum_{\ell=0}^{n} E(D|C=\ell)\,P(C=\ell) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n-\ell}{4} P(C=\ell)$

$= \frac{n}{4}\sum_{\ell=0}^{n} P(C=\ell) - \frac{1}{4}\sum_{\ell=0}^{n} \ell\,P(C=\ell)$

$= \frac{n}{4} - \frac{1}{4}E(C) = \frac{n}{4} - \frac{nb}{4N}$. Donc $\boxed{E(D) = \frac{n(N-b)}{4N}}$

- On a : $Y = C + D$ donc $E(Y) = E(C) + E(D) = \frac{nb}{N} + \frac{n(N-b)}{4N}$

Donc $\boxed{E(Y) = \frac{n(N+3b)}{4N}}$