CORRECTION DM 12

Problème 1 :

1) . X représente le tirage au hasard d'un élément de $[\![1,n]\!]$

donc $\boxed{X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])}$.

. On a donc : $\boxed{E(X) = \dfrac{n+1}{2}}$

. De plus $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$.

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{(n+1)\big(2(2n+1) - 3(n+1)\big)}{12}$

Ainsi $\boxed{V(X) = \dfrac{(n+1)(n-1)}{12}}$

2) Sachant $(X=k)$, la seconde urne est composée de $\sum_{j=1}^{k} j = \dfrac{k(k+1)}{2}$ boules dont j portant le numéro j si $j \leq k$ et 0 sinon

Donc : $\boxed{P_{(X=k)}(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{j}{\frac{k(k+1)}{2}} = \dfrac{2j}{k(k+1)} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

3-a) $\dfrac{1}{X(X+1)} = \dfrac{X+1-X}{X(X+1)}$ donc $\boxed{\dfrac{1}{X(X+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1}}$.

b) . On a : $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

. Soit $j \in [\![1,n]\!]$, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(X=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$,

$$P(Y=j) = \sum_{k=1}^{n} P_{(X=k)}(Y=j)\,P(X=k)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=j}^{n} \frac{2j}{k(k+1)} = \frac{2j}{n}\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{2j}{n}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{par somme télescopique.}$$

Donc $\boxed{P(Y=j) = \dfrac{2(n+1-j)}{n(n+1)}}$

4- $E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j P(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} j \cdot \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$

$= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} j - \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= n+1 - \frac{2n+1}{3}$

Donc $\boxed{E(Y) = \frac{n+2}{3}}$

5- On a $(X=1)\cap(Y=2) = \emptyset$ donc $P((X=1)\cap(Y=2)) = 0$

Or $P(X=1) = \frac{1}{n} \neq 0$ et $P(Y=2) = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \neq 0$

Donc $P((X=1)\cap(Y=2)) \neq P(X=1).P(Y=2)$

Ainsi $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

6-a) $E(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\, P((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\, P_{(X=i)}(Y=j)\, P(X=i)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} ij \frac{2j}{i(i+1)} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\sum_{j=1}^{i} j^2$

$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\frac{i(i+1)(2i+1)}{6} = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}(2i^2+i)$

$= \frac{1}{3n}\left(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$

$= \frac{n(n+1)}{18n}\left(2(2n+1)+3\right) = \frac{n+1}{18}(4n+5)$

Donc $\boxed{E(XY) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18}}$

b) $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}$

$= \frac{n+1}{18}\left(4n+5 - 3(n+2)\right)$

Ainsi $\boxed{\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(n-1)}{18}}$

Problème 2 :

1-a) $\boxed{\begin{array}{ll} \bullet\ a_{1,1} = \binom{p-1}{p-1} = 1 & \bullet\ a_{1,n-p+1} = \binom{n}{p} \\ \bullet\ a_{n-p+1,1} = \binom{n}{n} = 1 & \bullet\ a_{n-p+1,n-p+1} = \binom{2n-p}{n} \end{array}}$

b) • $A_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc $d_n = a_{1,1}$ ainsi $\boxed{d_n = 1.}$

• $A_{n-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{n-1} \\ 1 & \binom{2n-(n-1)}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{pmatrix}$

Donc $d_{n-1} = n+1-n$ ainsi $\boxed{d_{n-1} = 1.}$

• $A_{n-2} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A_{n-2} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} \\ 1 & \binom{n+1}{n} & \binom{2n-(n-2)}{n} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $d_{n-2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & n-1 & n(n-1) \\ 1 & n & n(n+1) \\ 1 & n+1 & (n+1)(n+2) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \boxed{1} & n-1 & n(n-1) \\ \boxed{0} & 1 & 2n \\ \boxed{0} & 2 & 4n+2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2n \\ 2 & 4n+2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(4n+2-2.2n) = 1$$

D'où $\boxed{d_{n-2} = 1}.$

c-i) Le coefficient d'indice (i,j) de la nouvelle ligne L_i est

$$a_{i,j} - a_{i-1,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1} - \binom{p+i+j-3}{p+i-2}$$

Donc, d'après le triangle de Pascal :

$$\boxed{\begin{cases} \binom{p+i+j-3}{p+i-1} & \text{si } j \neq 1 \\ 0 & \text{si } j = 1 \end{cases}}$$

ii) • Pour $j \neq 1$, le coefficient (i,j) de la nouvelle ligne L_i est le coefficient $(i-1, j-1)$ de A_{p+1} donc :

$$d_p = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} * & \cdots & * \\ & A_{p+1} & \end{matrix} \end{vmatrix} = \det(A_{p+1}). \quad \text{Donc } \boxed{d_p = d_{p+1}}.$$

• Comme $(d_p)_{p \in [\![0,n]\!]}$ est constante, $\boxed{d_p = d_n = 1.}$

2-a) • $D_0 = \det(0!)$ donc $\boxed{D_0 = 1}$

• $D_1 = \begin{vmatrix} 0! & 1! \\ 1! & 2! \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1$ donc $\boxed{D_1 = 1}$

• $D_2 = \begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! \\ 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{vmatrix} = 48 + 12 + 12 - 8 - 36 - 24 = 4$ donc $\boxed{D_2 = 4}$.

• $\Delta_0 = \det\left(\binom{0}{0}\right) = 1$ donc $\boxed{\Delta_0 = 1}$.

• $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1$ donc $\boxed{\Delta_1 = 1}$

• $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 3 + 3 - 2 - 9 - 6 = 1$ donc $\boxed{\Delta_2 = 1}$

b) $\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right) = \det\left(\dfrac{(i+j)!}{i!\,j!}\right) = \dfrac{1}{\prod_{i=0}^{n} i!} \det\left(\dfrac{(i+j)!}{j!}\right)$ par linéarité par rapport aux lignes.

$= \dfrac{1}{\prod_{i=0}^{n} i!} \cdot \dfrac{1}{\prod_{j=0}^{n} j!} \det((i+j)!)$ par linéarité par rapport aux colonnes.

$= \dfrac{1}{\left(\prod_{i=0}^{n} i!\right)^2} D_n.$

Donc : $\boxed{D_n = \left(\prod_{i=0}^{n} i!\right)^2 \Delta_n}$

c) On a : $\Delta_n = \det(A_0) = d_0 = 1.$

Donc $\boxed{\Delta_n = 1 \quad \text{et} \quad D_n = \left(\prod_{i=0}^{n} i!\right)^2}$