CORRECTION DM 13

1) Soit $(e_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, il s'agit d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

donc, soit $x \in E$, $\quad \sum_{j=1}^{n} (x|e_j)^2 = \|x\|^2 \geqslant \alpha \|x\|^2$ avec $\alpha = 1$.

Donc $\boxed{\text{la base canonique de } \mathbb{R}^n \text{ vérifie } (*)}$

2) Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1,..,e_m)^\perp$. Alors : $\forall j \in [\![1,m]\!]$, $(x|e_j) = 0$.

Donc $\alpha\|x\|^2 \leq 0$. Ainsi $\|x\|^2 = 0$ donc $x = 0$

D'où : $\mathrm{Vect}(e_1,..,e_m)^\perp = \{0\}$. Ainsi $\mathrm{Vect}(e_1,..,e_m)^{\perp\perp} = \{0\}^\perp$.

Or E est de dimension finie. Donc : $\boxed{\mathrm{Vect}(e_1,..,e_m) = E.}$

3) Soit $x = (x_1, y_1) \in E$,

- $$\sum_{j=1}^{3} (x|e_j)^2 = y_1^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1\right)^2$$
$$= y_1^2 + \frac{3}{4}x_1^2 + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}x_1y_1} + \frac{1}{4}y_1^2 + \frac{3}{4}x_1^2 - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}x_1y_1} + \frac{1}{4}y_1^2$$
$$= \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}y_1^2$$

Donc : $\boxed{\sum_{j=1}^{3} (x|e_j)^2 = \frac{3}{2}\|x\|^2.}$

- $$T(x) = y_1(0,1) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{4}x_1 + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}y_1} + \frac{3}{4}x_1 - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}y_1},\ y_1 + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}x_1} + \frac{1}{4}y_1 - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}x_1} + \frac{1}{4}y_1\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2}x_1, \frac{3}{2}y_1\right) = \frac{3}{2}x$$

Donc $\boxed{T = \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E.}$

4) • Soit $x \in E$,

$$(T(x)|x) = \sum_{j=1}^{m} (x|e_j)(e_j|x) = \sum_{j=1}^{m} (x|e_j)^2$$

Donc $\boxed{(T(x)|x) \geqslant \alpha \|x\|^2}$

• Soit $x \in \ker T$, on a $T(x) = 0$ donc $(T(x)|x) = 0$. Ainsi $0 \geqslant \alpha \|x\|^2$

Donc $\|x\|^2 = 0$ donc $x = 0$. D'où $\ker T = \{0\}$.

Ainsi T injectif. Comme $T \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension finie,

$\boxed{T \text{ est bijectif}}$.

5) Soit $x \in E$, on a $\alpha \|T^{-1}(x)\|^2 \leqslant (T(T^{-1}(x))|T^{-1}(x))$

Donc $\alpha \|T^{-1}(x)\|^2 \leqslant (x|T^{-1}(x)) \leqslant \|x\| \|T^{-1}(x)\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

• Si $x \neq 0$, $T^{-1}(x) \neq 0$ donc $\alpha \|T^{-1}(x)\| \leqslant \|x\|$

Si $x = 0$, $T^{-1}(x) = 0$ donc $\alpha \|T^{-1}(x)\| = 0 = \|x\|$

Dans tous les cas : $\alpha \|T^{-1}(x)\| \leqslant \|x\|$.

• De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(x|T^{-1}(x)) \leqslant \|x\| \|T^{-1}(x)\|$$

Donc $\boxed{(x|T^{-1}(x)) \leqslant \frac{1}{\alpha} \|x\|^2}$

6) • Posons $f : \begin{array}{l} F \to E \\ h \mapsto \sum_{j=1}^{m} h_j e_j \end{array}$. Alors f est une application linéaire et,

soit $x \in E, h \in F$, on a $h = \sum_{j=1}^{m} h_j f_j$ avec : $\forall j \in [\![1, m]\!]$, $h_j = (h|f_j)_F$ car $(f_1, , f_m)$ base orthonormée de F

$$(f(h)|x) = \sum_{j=1}^{m} h_j (e_j|x)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (h|f_j)_F (e_j|x)$$

$$= (h| \sum_{j=1}^{m} (e_j|x) f_j)_F = (h|\varphi(x))_F.$$

Donc, par unicité : $f = \Psi$.

Ainsi : $\boxed{\Psi(h) = \sum_{j=1}^{m} h_j e_j}$.

• Soit $x \in E$, $\phi(x) = \sum_{j=1}^{m} (x|e_j) f_j = \sum_{j=1}^{m} h_j f_j$ où $\forall j \in [\![1, m]\!], h_j = (x|e_j)$ 3

Donc $\psi \circ \phi(x) = \sum_{j=1}^{m} h_j e_j = \sum_{j=1}^{m} (x|e_j) e_j = T(x)$

Donc $\boxed{\psi \circ \phi = T}$.

7-a) Soient $x, y \in E$,

• $(T(x)|y) = \sum_{j=1}^{m} (x|e_j)(e_j|y) = (x | \sum_{j=1}^{m} (e_j|y) e_j) = (x|T(y))$

Donc $\boxed{(T(x)|y) = (x|T(y))}$

• $(T(T^{-1}(x)) | T^{-1}(y)) = (T^{-1}(x) | T(T^{-1}(y)))$

donc $\boxed{(x|T^{-1}(y)) = (T^{-1}(x)|y)}$

b) Soit $x \in E$,

$\tilde{\phi} \circ T(x) = \sum_{j=1}^{m} (T(x)|\tilde{e}_j) f_j = \sum_{j=1}^{n} (T(x)|T^{-1}(e_j)) f_j$

$= \sum_{j=1}^{m} (x|T(T^{-1}(e_j))) f_j = \sum_{j=1}^{m} (x|e_j) f_j = \phi(x)$.

Donc $\tilde{\phi} \circ T = \phi$. Ainsi $\boxed{\tilde{\phi} = \phi \circ T^{-1}}$.

c) • Soit $y \in \operatorname{Im} \tilde{\phi} \cap (\operatorname{Im} \phi)^{\perp}$. Alors, il existe $x \in E$ tel que

$y = \tilde{\phi}(x) = \phi(T^{-1}(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} \phi$.

Ainsi $y \in \operatorname{Im} \phi \cap (\operatorname{Im} \phi)^{\perp} = \{0\}$ donc $y = 0$.

D'où : $\operatorname{Im} \tilde{\phi} \cap (\operatorname{Im} \phi)^{\perp} = \{0\}$.

• Comme T est un isomorphisme, $\operatorname{rg} \tilde{\phi} = \operatorname{rg}(\phi \circ T^{-1}) = \operatorname{rg} \phi$.

Ainsi $\dim \operatorname{Im} \tilde{\phi} = \dim \operatorname{Im} \phi$.

Donc $\dim \operatorname{Im} \tilde{\phi} + \dim (\operatorname{Im} \phi)^{\perp} = \dim \operatorname{Im} \phi + \dim (\operatorname{Im} \phi)^{\perp} = \dim F$.

• Donc $\boxed{F = \operatorname{Im} \tilde{\phi} \oplus (\operatorname{Im} \phi)^{\perp}}$

8-a) • Soit $x \in \ker \Psi$, soit $y \in \operatorname{Im} \phi$, il existe $z \in E$ tel que $y = \phi(z)$. ④

$$(x|y)_F = (x|\phi(z))_F = (\Psi(x)|z) = (0|z) = 0.$$

Donc $x \in (\operatorname{Im} \phi)^{\perp}$. Ainsi $\boxed{\ker \Psi \subset (\operatorname{Im} \phi)^{\perp}}$

• Soit $h \in (\operatorname{Im} \phi)^{\perp}$. Alors : $\forall x \in E$, $(h|\phi(x))_F = 0$.

Donc : $\forall x \in E$, $(\Psi(h)|x) = 0$.

Ainsi $\Psi(h) \in E^{\perp} = \{0\}$. Donc $\Psi(h) = 0$.

Ainsi $h \in \ker \Psi$. Donc $(\operatorname{Im} \phi)^{\perp} \subset \ker \Psi$.

• Donc : $\boxed{\ker \Psi = (\operatorname{Im} \phi)^{\perp}.}$

b) On a $y \in \operatorname{Im} \phi = (\ker \Psi)^{\perp}$ donc $\boxed{p(y) = 0}$

c) On a : $\min\limits_{z \in \ker \Psi} \|y - z\|_F^2 = \|y - p(y)\|_F^2$

Or $p(y) = 0$ donc $\boxed{\min\limits_{z \in \ker \Psi} \|y - z\|_F^2 = \|y\|_F^2}$.

d) $\Psi(y) = \Psi \circ \phi \circ T^{-1}(x) = T \circ T^{-1}(x) = x$ donc $\boxed{y \in \Psi^{-1}(\{x\})}$

e) • $\left\{ \sum\limits_{j=1}^{m} h_j^2, \ x = \sum\limits_{j=1}^{m} h_j e_j \right\} = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{m} h_j^2, \ x = \Psi(h) \text{ et } h = \sum\limits_{j=1}^{m} h_j f_j \right\}$

$= \left\{ \|h\|_F^2, \ x = \Psi(h) \right\}$ car $(f_1, \dots, f_m)$ base orthonormée de F.

• Soit $h \in F$

$x = \Psi(h) \iff \Psi(y) = \Psi(h) \iff y - h \in \ker \Psi$.

$\iff \exists z \in \ker \Psi, \ y - h = z$

$\iff \exists z \in \ker \Psi, \ h = y - z$.

Donc $\left\{ \sum\limits_{j=1}^{m} h_j^2, \ x = \sum\limits_{j=1}^{m} h_j e_j \right\} = \left\{ \|y - z\|_F^2, \ z \in \ker \Psi \right\}$.

• Donc : $\min\left(\sum\limits_{j=1}^{m} h_j^2, \ x = \sum\limits_{j=1}^{m} h_j e_j \right) = \min\limits_{z \in \ker \Psi} \|y - z\|_F^2$

Ainsi $\boxed{\min\left(\sum\limits_{j=1}^{m} h_j^2, \ x = \sum\limits_{j=1}^{m} h_j e_j \right) = \|y\|_F^2}$

et ce minimum est atteint pour $z=0$, c'est-à-dire $h=y$

Or : $y = \tilde{\Phi}(x) = \sum_{j=1}^{m} (x|\tilde{e}_j) f_j$

Donc, ce minimum est atteint par : $\boxed{\forall j \in [\![1, m]\!], \ h_j = (x|\tilde{e}_j)}$