CORRECTION DM14

1-a) Soit $n \geq 3$, $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$. Or $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente

donc : $\boxed{\sum \frac{\ln n}{n} \text{ diverge.}}$

b) • Posons $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. f est dérivable et, soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \leq 0 \text{ si } x \in [e, +\infty[.$$

Donc f est décroissante sur $[e, +\infty[$.

• Ainsi f est continue, positive et décroissante sur $[3, +\infty[$, donc, par comparaison série intégrale, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_3^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \leq \frac{\ln 3}{3} + \int_3^n f(t)\,dt.$$

Donc $\frac{\ln 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt \leq S_n \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \int_3^n \frac{\ln t}{t}\,dt$

Ainsi $\frac{\ln 2}{2} + \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_3^{n+1} \leq S_n \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_3^n$

D'où : $\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \leq S_n \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2$

Or : • $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

• $\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \sim \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$

car : $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \to 1$ donc $\ln(n+1) \sim \ln n$

Ainsi : $\boxed{S_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2.}$

2-a) Soit $n \geq 3$

$$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} - S_n + \frac{\ln^2(n)}{2} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2}$$

. Posons $g : x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{2}$, alors: $u_{n+1} - u_n = g'(n+1) - g(n+1) + g(n)$.

g est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que: $g(n+1) - g(n) = g'(c_n)$.

Ainsi $u_{n+1} - u_n = g'(n+1) - g'(c_n)$.

. Or: $\forall x \in [3, +\infty[$, $g'(x) = \frac{\ln x}{x} = f(x)$ donc g' est décroissante sur $[3, +\infty[$.

Comme $c_n \leq n+1$, on a $g'(c_n) \geq g'(n+1)$

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

, D'où: $\boxed{(u_n)_{n \geq 3} \text{ est décroissante.}}$

b) Soit $n \geq 3$, d'après 1. c, $S_n \geq \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2$

donc $u_n \geq \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 + \frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2\right)$

$\geq \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}(\ln 3)^2$

Donc $(u_n)_{n \geq 3}$ est minorée.

Comme $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante, $\boxed{(u_n) \text{ converge.}}$

3-a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2j-1} \frac{\ln(2j)}{2j} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{2j+1-1} \frac{\ln(2j+1)}{2j+1}$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{2j} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln(2j+1)}{2j+1}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{j} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln(2j+1)}{2j+1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{2j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{2j}$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{j} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln 2 + \ln j}{j} + S_{2n} = -\ln 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - S_n + S_{2n}$$

Donc : $\boxed{A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

b) . Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$

. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $v_n - v_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}.$

. On : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{2n^2} \leq 0$ et $\sum\left(-\frac{1}{2n^2}\right)$ est une série de Riemann convergente. Donc $\sum(v_n - v_{n-1})$ converge.

. Par séries télescopiques, (v_n) converge. Posons $\gamma = \lim v_n$.

On a : $v_n = \gamma + o(1).$

Donc : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).}$

c) On a $\lim u_n = \ell$, donc $u_n = \ell + o(1)$. Ainsi $S_n = \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1).$

Donc $A_{2n} = \frac{\ln^2(2n)}{2} + \ell - \left(\frac{\ln^2(n)}{2} + \ell\right) - \ln 2 \left(\ln n + \gamma\right) + o(1).$

$$= \frac{(\ln 2 + \ln n)^2}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln 2 . \ln n - \gamma \ln 2 + o(1).$$

$$= \frac{\ln^2 2 + 2 \ln 2 \ln n + \ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 n}{2} - \ln 2 \ln n - \gamma \ln 2 + o(1).$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2 + o(1).$$

Donc $\boxed{(A_{2n}) \text{ converge et } \lim A_{2n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2}$

d) $A_{2n+1} = A_{2n} + (-1)^{2n+1-1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$

Or $\lim \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = 0$ donc :

$\boxed{(A_{2n+1}) \text{ converge et } \lim A_{2n+1} = \lim A_{2n} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2.}$

e) • (A_{2n}) et (A_{2n+1}) convergent vers la même limite, donc (A_n) converge vers cette limite.

• Ainsi $\boxed{\begin{array}{l} \sum (-1)^{k-1} \dfrac{\ln k}{k} \text{ converge} \\ \text{et } \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2 . \end{array}}$