

Problème 1:

$$1-a) S_{0,0} = \sum_{k=0}^0 (-1)^k \binom{0}{k} k^0 = (-1)^0 \binom{0}{0} 0^0 \text{ donc } \boxed{S_{0,0} = 1}$$

$$b) S_{n,0} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n \text{ donc } \boxed{S_{n,0} = 0}$$

$$2-a) f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k 1^{n-k}$$

$$\text{Donc } \boxed{f(x) = (1-x)^n}$$

b) f est dérivable et, sur $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f'(x) = -n(1-x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} k x^{k-1}}$$

$$c) S_{n,1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} k = f'(1) = -n 0^{n-1}$$

$$\text{Donc } \boxed{S_{n,1} = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ -1 & n = 1 \end{cases}}$$

3-a) Soit $k \in \mathbb{N} \cap \mathbb{D}$,

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}$$

$$\text{Donc } \boxed{k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N} \cap \mathbb{D}$.

D'après le triangle de Pascal: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

$$\text{Donc: } \boxed{\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}}$$

$$\begin{aligned} c) S_{n,p+1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^{p+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k \cdot k^p \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k n \binom{n-1}{k-1} k^p \text{ d'après 3.a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{m,p+1} &= m \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m-1}{k-1} k^p \\
 &= m \left(\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \left(\binom{m}{k} - \binom{m-1}{k} \right) k^p + (-1)^m m^p \right) \\
 &= m \left(\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} k^p - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} k^p + (-1)^m m^p \right) \\
 &= m \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} k^p - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} k^p \right)
 \end{aligned}$$

$$S_{m,p+1} = m (S_{m,p} - S_{m-1,p})$$

d). Par $p=0$. Soit $m > p$. On a $m \in \mathbb{N}^*$, donc d'après 1.d, $S_{m,p} = S_{m,0} = 0$.

• Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que: $\forall m > p, S_{m,p} = 0$.

Soit $m > p+1$. Alors $m > p$ donc $S_{m,p} = 0$ et $m-1 > p$ donc $S_{m-1,p} = 0$.

Ainsi $S_{m,p+1} = m (S_{m,p} - S_{m-1,p}) = 0$.

• Donc, par récurrence:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall m > p, S_{m,p} = 0.$$

Problème 2:

1-a) On a:
$$z_1 + z_2 = 2a \text{ et } z_1 z_2 = b.$$

b) $z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ donc $\operatorname{Im}(z + \frac{1}{z}) = \operatorname{Im}(z) + \frac{1}{|z|^2} \operatorname{Im}(\bar{z})$
 $= \operatorname{Im}(z) (1 - \frac{1}{|z|^2})$

Ainsi: $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z + \frac{1}{z}) = 0$
 $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) (1 - \frac{1}{|z|^2}) = 0$
 $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ ou } 1 - \frac{1}{|z|^2} = 0$

Donc
$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z| = 1.$$

c). Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = |-x - \frac{1}{x}| = |x + \frac{1}{x}| = f(x)$
 Ainsi f est paire. On l'étudie sur $\mathbb{R}^{++}$.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. ③

2	0	1	+\infty	
$f'(x)$		-	0	+
f			2	

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) \geq f(1) = 2$

• Comme f est p.c.m. : $\forall x \in \mathbb{R}^x, f(x) \geq f(1) = 2$.

Donc f admet un minimum et $\min_{\mathbb{R}^x} f = f(1) = 2$.

2-a) • le discriminant associé à $z^2 - 2(1+i)z + 4i = 0$ est :

$$\Delta = 4(1+i)^2 - 16i = 8i - 16i = -8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Ses racines ont $\pm \sqrt{8} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pm 2(1-i)$

• Ainsi $z_1 = \frac{2(1+i) + 2(1-i)}{2} = 2$ et $z_2 = \frac{2(1+i) - 2(1-i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$

Donc $|z_1| = 2$ et $\text{Arg}(z_1) = 0$, $|z_2| = 1$ et $\text{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi : $|z_1| = |z_2|$ et $\text{Arg}(z_1) \neq \text{Arg}(z_2)$.

b) • le discriminant associé à $z^2 - (2-i)z + 3-i = 0$ est :

$$\Delta = (2-i)^2 - 4(3-i) = 4 - 4i - 1 - 12 + 4i = -9$$

Donc $z_1 = \frac{2-i+3i}{2} = 1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

et $z_2 = \frac{2-i-3i}{2} = 1-2i$

• Donc $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{4}$, $|z_2| = \sqrt{5}$

et $\sqrt{5} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \neq z_2$ donc $\text{Arg}(z_2) \neq \text{Arg}(z_1)$.

Ainsi $|z_1| \neq |z_2|$ et $\text{Arg}(z_1) \neq \text{Arg}(z_2)$.

c) Le discriminant associé à $z^2 - 3(1+2i)z - 6+8i = 0$ est : (4)

$$\Delta = 9(1+2i)^2 - 4(-6+8i) = 9(1+4i-4) + 24 - 32i = -3 + 4i$$

• Soit $x, y \in \mathbb{R}$,
 $(x+iy)^2 = -3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ 2xy = 4 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x+iy = \pm(1+2i)$

Donc $1+2i$ est une racine carrée de Δ .

• D'où $z_1 = \frac{3(1+2i) + 1+2i}{2} = 2+4i = 2(1+2i)$

$$z_2 = \frac{3(1+2i) - (1+2i)}{2} = 1+2i$$

Donc $|z_1| = 2\sqrt{5}$ et $|z_2| = \sqrt{5}$.

et $\arg(z_1) = \arg(2z_2) = \arg(z_2)$ car $2 \in \mathbb{R}^+$

Donc $|z_1| \neq |z_2|$ et $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

3- Le discriminant associé à (E) est $\Delta = 4a^2 - 4b = 4(a^2 - b)$.

Il plus : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \Delta = 0$.

Ainsi $z_1 = z_2 \Leftrightarrow b = a^2$.

4-a) i- Posons $r = |z_1| = |z_2|$, $\theta_1 = \arg(z_1)$ et $\theta_2 = \arg(z_2)$.

On a : $z_1 = r e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r e^{i\theta_2}$.

Donc : $a = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{r}{2}(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}) = \frac{r}{2} e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} (e^{i \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} + e^{i \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}})$
 $= \frac{r}{2} e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \cdot 2 \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = r \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$

Donc $a^2 = r^2 \cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

• $b = z_1 z_2 = r^2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Donc $\frac{a^2}{b} = \cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)$.

D'où : $\frac{a^2}{b} = \cos^2\left(\frac{\arg(z_1) - \arg(z_2)}{2}\right)$

$$ii) \frac{a^2}{b} = \cos^2\left(\frac{\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)}{2}\right) \in [0, 1].$$

(5)

De plus $\cos^2\left(\frac{\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}(z_1) \equiv \pi + \text{Arg}(z_2) \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = r e^{i(\pi + \text{Arg}(z_2))}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = -r e^{i \text{Arg}(z_2)}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = -z_2.$$

Impossible.
On a: $a \neq 0$.

Or $a \neq 0$ donc $z_1 + z_2 = 2a \neq 0$, ainsi $z_1 \neq -z_2$.

Donc $\cos^2\left(\frac{\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)}{2}\right) \neq 0$

D'après: $\boxed{\frac{a^2}{b} \in]0, 1[}$

b-i) On suppose $\frac{a^2}{b} \in \mathbb{R}$.

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2}{z_1 z_2} = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} - 2$$

$$= \frac{(2a)^2}{b} - 2 = 4 \frac{a^2}{b} - 2$$

Donc $\boxed{\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}}$

ii) On suppose $\frac{a^2}{b} \in]0, 1[$.

Posez $\gamma = \frac{z_1}{z_2}$. On a $\gamma + \frac{1}{\gamma} \in \mathbb{R}$. Donc $\gamma \in \mathbb{R}$ ou $|\gamma| = 1$.

• si $\gamma \in \mathbb{R}$, alors $\gamma = x \in \mathbb{R}$ donc $\left|\gamma + \frac{1}{\gamma}\right| = \left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$

Or $\gamma + \frac{1}{\gamma} = 4 \frac{a^2}{b} - 2$ donc $-2 < \gamma + \frac{1}{\gamma} \leq 2$

Donc $\gamma + \frac{1}{\gamma} = 2$ et d'après 1.c), $\gamma = 1$. Ainsi $z_1 = z_2$

Donc $|z_1| = |z_2|$.

6

• si $|z_1| = 1$, alors $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1$ donc $|z_1| = |z_2|$.

Dans tous les cas: $|z_1| = |z_2|$.

c) On a donc: $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \frac{a^2}{r} \in]0, 1]$.

5-a).i. Puis $\theta = \arg(z_1) = \arg(z_2)$. On a: $z_1 = |z_1| e^{i\theta}$ et $z_2 = |z_2| e^{i\theta}$

$a = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{e^{i\theta}}{2} (|z_1| + |z_2|)$

donc $a^2 = \frac{e^{2i\theta}}{4} (|z_1| + |z_2|)^2$

$b = z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{2i\theta}$

D'où: $\frac{b}{a^2} = \frac{4 |z_1| |z_2|}{(|z_1| + |z_2|)^2}$

ii) $\frac{b}{a^2} = \frac{(|z_1| + |z_2|)^2 - (|z_1| - |z_2|)^2}{(|z_1| + |z_2|)^2} = 1 - \frac{(|z_1| - |z_2|)^2}{(|z_1| + |z_2|)^2} \leq 1$

De plus $|z_1| \neq 0$ et $|z_2| \neq 0$ donc $\frac{b}{a^2} > 0$.

Donc: $\frac{b}{a^2} \in]0, 1]$.

d) Supposons $\frac{b}{a^2} \in]0, 1]$.

le discriminant associé à (E) est $\Delta = 4a^2 - 4b = 4a^2(1 - \frac{b}{a^2}) \geq 0$

Donc $z_1 = \frac{2a + 2a\sqrt{1 - \frac{b}{a^2}}}{2} = a + a\sqrt{1 - \frac{b}{a^2}} = a(1 + \sqrt{1 - \frac{b}{a^2}})$

et $z_2 = \frac{2a - 2a\sqrt{1 - \frac{b}{a^2}}}{2} = a(1 - \sqrt{1 - \frac{b}{a^2}})$

Or: $1 + \sqrt{1 - \frac{b}{a^2}} \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $\arg(z_1) = \arg(a)$

et $1 - \sqrt{1 - \frac{b}{a^2}} \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $\arg(z_2) = \arg(a)$.

Ainsi: $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

e) On a donc: $\arg(z_1) = \arg(z_2) \Leftrightarrow \frac{b}{a^2} \in]0, 1]$.

6- • Pair 2.a)

$$a^2 = 4(1+i)^2 = 8i, \quad b = 4i \quad \text{dnc} \quad \frac{a^2}{b} = 2 \notin]0,1] \quad \text{et} \quad \frac{b}{a^2} = \frac{1}{2} \in]0,1]$$

$$\text{Dnc} \quad |z_1| = |z_2| \quad \text{et} \quad \text{Arg}(z_1) \neq \text{Arg}(z_2).$$

• Pair 2.b)

$$a^2 = (2-i)^2 = 3-4i, \quad b = 3-i \quad \text{dnc} \quad \frac{a^2}{b} = \frac{3-4i}{3-i} \notin \mathbb{R}$$

$$\text{dnc} \quad |z_1| \neq |z_2| \quad \text{et} \quad \text{Arg}(z_1) \neq \text{Arg}(z_2)$$

• Pair 2.c)

$$a^2 = 9(1+2i)^2 = 9(-3+4i), \quad b = -6+8i = 2(-3+4i)$$

$$\text{Dnc} \quad \frac{a^2}{b} = \frac{9}{2} \notin]0,1] \quad \text{et} \quad \frac{b}{a^2} = \frac{2}{9} \in]0,1]$$

$$\text{dnc} \quad |z_1| \neq |z_2| \quad \text{et} \quad \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2).$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \quad \text{et} \quad \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} \in]0,1] \quad \text{et} \quad \frac{b}{a^2} \in]0,1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} \in]0,1] \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{b} \in [1, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} = 1$$

$$\text{Dnc} \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow a^2 = b.$$