

Problème 1:

1-a-2) $f(0) = \int_0^0 f(t)dt + e^0$ donc : $f(0) = 1$

ii). $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est une primitive de f , elle est donc dérivable et sa dérivée est f .

• $\exp$ est dérivable

• Donc :

f est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) + e^x$.

iii). f est solution de $y' - y = e^x$

• les solutions de $y' - y = 0$ sont : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de $y' - y = e^x$ de la forme : $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec λ dérivable.
 $x \mapsto \lambda(x)e^x$

On a : $y' - y = e^x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^x = e^x$
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = 1$

Donc $\lambda: x \mapsto x$ convient et $y: x \mapsto xe^x$ est solution de $y' - y = e^x$

• Ainsi les solutions de $y' - y = e^x$ sont : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \lambda e^x + x e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

• Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^x + x e^x$.

Or : $f(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ donc.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x+1)e^x$

b- : Analyse : Supposons qu'il existe f solution du problème.

D'après 1.a

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x+1)e^x$.

• Synthese: Pours $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x+1)e^x$.

(2)

• f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t) dt + e^x = \int_0^x (t+1)e^t dt + e^x$

On effectue l'intégration par parties: $u(t) = t+1$ $u'(t) = 1$
 $v'(t) = e^t$ $v(t) = e^t$.

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt + e^x &= [(t+1)e^t]_0^x - \int_0^x e^t dt + e^x \\ &= (x+1)e^x - 1 - [e^t]_0^x + e^x \\ &= (x+1)e^x - 1 - (e^x - 1) + e^x \\ &= (x+1)e^x = f(x). \end{aligned}$$

• Donc f conviend.

• Conclusion: L'ensemble des solutions est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+1)e^x \end{array} \right\}$$

2-a-x) $f(0) = \int_0^0 f(t) dt + e^0$ donc $\boxed{f(0) = 1}$

ii) • Comme f est continue, f admet une primitive F .

• Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^{-x} f(t) dt + e^x = [F(t)]_0^{-x} + e^x$$

Donc $\boxed{f(x) = F(-x) - F(0) + e^x}$

iii) • F est dérivable et a pour dérivée f , exp est dérivable donc:

$$\boxed{f \text{ est dérivable.}}$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -F'(-x) + e^x$$

Donc $\boxed{f'(x) = -f(-x) + e^x}$

• $f'(0) = -f(0) + e^0 = -1 + 1$ donc $\boxed{f'(0) = 0}$

20) f est dérivable et $\exp$ est dérivable donc f' est dérivable.

(3)

Alors

f est deux fois dérivable.

• Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = -(-f'(-x)) + e^x = f'(-x) + e^x$$

$$\text{Or } f'(-x) = -f(x) + e^{-x}$$

$$\text{Donc : } f''(x) = -f(x) + e^{-x} + e^x$$

1) f est solution de $y'' + y = e^{-x} + e^x$.

• On résout $y'' + y = 0$.

L'équation caractéristique associée est : $\lambda^2 + 1 = 0$.

Ses racines sont : $\pm i$. Donc les solutions de $y'' + y = 0$ sont :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

• Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de $y'' + y = e^{-x}$ de la forme $y: x \mapsto A e^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a : } y'' + y = e^{-x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, A e^{-x} + A e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Donc $y: x \mapsto \frac{1}{2} e^{-x}$ convient.

• Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de $y'' + y = e^x$ de la forme $y: x \mapsto A e^x$, $A \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a : } y'' + y = e^x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, A e^x + A e^x = e^x \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Donc $y: x \mapsto \frac{1}{2} e^x$ convient.

• D'après le principe de superposition $y: x \mapsto \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} e^x = \text{ch}(x)$ est solution de $y'' + y = e^{-x} + e^x$

• Donc les solutions de $y'' + y = e^{-x} + e^x$ sont :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x + \text{ch } x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

• Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + ch x.$$

• R plus:
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 1 = 1 \\ \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ch(x).}$$

b) • Analyse: Supposons qu'il existe f solution du problème. D'après 2.a, $f = ch$.

• Synthèse: Puisque $f = ch$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ et:

$$\begin{aligned} \text{soit } x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{-x} f(t) dt + e^x &= \left[sh t \right]_0^{-x} + e^x = sh(-x) + e^x \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} + e^x = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x) = f(x) \end{aligned}$$

Donc f convient.

• Conclusion: L'ensemble des solutions est:

$$\boxed{\{ ch \}}.$$