

Problème 1:1) Supposons $A = B$. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$

$$f(X) = (A \cap X) \cup (A \cap \bar{X}) = A \cap (X \cup \bar{X}) = A \cap E = A$$

Donc

$$\boxed{f: X \mapsto A.}$$

$$\begin{aligned}
 2) \bullet f(\emptyset) &= (A \cap \emptyset) \cup (B \cap E) = \emptyset \cup B = B & \bullet f(A) &= (A \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) \\
 & & &= (A \cup B) \cap E = A \cup B \\
 \bullet f(E) &= (A \cap E) \cup (B \cap \emptyset) = A \cup \emptyset = A & \bullet f(B) &= (A \cap B) \cup (B \cap \bar{B}) = (A \cap B) \cup \emptyset \\
 & & &= A \cap B \\
 \bullet f(\bar{A}) &= (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap A) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B \\
 \bullet f(\bar{B}) &= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = (A \cup B) \cap E = A \cup B \\
 \bullet f(A \cap B) &= (A \cap A \cap B) \cup (B \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B}) \\
 &= (B \cap (A \cup \bar{A})) \cup \emptyset = B \cap E = B \\
 \bullet f(A \cup B) &= (A \cap (A \cup B)) \cup (B \cap (\bar{A} \cap \bar{B})) = A \cup (\emptyset \cap \bar{A}) \quad \text{car } A \subset A \cup B \\
 &= A \cup \emptyset = A
 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f(\emptyset) = B, f(E) = A, f(A) = A \cup B, f(B) = A \cap B, f(\bar{A}) = A \cap B, f(\bar{B}) = A \cup B} \\
 \boxed{f(A \cap B) = B \text{ et } f(A \cup B) = A}$$

3-a) Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = \emptyset$.

$$\text{Alors } (A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = \emptyset \text{ donc } A \cap X = \emptyset \text{ et } B \cap \bar{X} = \emptyset$$

$$\text{Ainsi } X \subset \bar{A} \text{ et } \bar{X} \subset \bar{B} \text{ donc } B \subset X \subset \bar{A}$$

$$\text{D'où } B \subset \bar{A} \text{ ainsi } A \cap B = \emptyset.$$

$$\bullet \text{ Si } A \cap B = \emptyset, \text{ posons } X = B. \text{ On a } f(X) = f(B) = A \cap B = \emptyset$$

Donc

$$\boxed{\text{L'équation } f(X) = \emptyset \text{ admet au moins une solution si } A \cap B = \emptyset.}$$

b) Supposons $A \cap B = \emptyset$

(2)

• Analyse: Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = \emptyset$.

On a alors: $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = \emptyset$

Donc $A \cap X = \emptyset$ et $B \cap \bar{X} = \emptyset$

Ainsi $X \subset \bar{A}$ et $\bar{X} \subset \bar{B}$ donc: $B \subset X \subset \bar{A}$.

• Synthèse: Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $B \subset X \subset \bar{A}$.

Alors $A \cap X \subset A \cap \bar{A}$ donc $A \cap X \subset \emptyset$ d'où $A \cap X = \emptyset$

• $B \subset X$ donc $\bar{X} \subset \bar{B}$ donc $B \cap \bar{X} \subset B \cap \bar{B}$, d'où $B \cap \bar{X} = \emptyset$
ainsi $B \cap \bar{X} = \emptyset$

Ainsi $f(X) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

• Conclusion: les relations sont les $X \in \mathcal{P}(E)$ tels que:

$$B \subset X \subset \bar{A}.$$

4-a) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a: $A \cap X \subset A$ et $B \cap \bar{X} \subset B$
donc $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) \subset A \cup B$.

Ainsi $f(X) \subset A \cup B$.

b) • Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = E$.

Alors $E \subset A \cup B$. Donc $A \cup B = E$.

• Supposons $A \cup B = E$. Prenons $X = A$.

On a $f(X) = f(A) = A \cup B = E$.

Donc l'équation $f(X) = E$ admet au moins une solution si $A \cup B = E$.

Supposons $A \cup B = E$

c) • Analyse: Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = E$.

Alors $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = E$

• Soit $x \in E$. On a $x \in E = (A \cap X) \cup (B \cap \bar{X})$

Or $x \notin B \cap \bar{X}$ d'où $x \in A \cap X$. Donc $x \in X$.

Ainsi $E \subset X$

• Soit $x \in X$, on a $x \in E = (A \cap X) \cup (B \cap \bar{X})$

Or $x \notin B \cap \bar{X}$, d'où $x \in A \cap X$. Donc $x \in A$.

Ainsi $X \subset A$.

Donc $\bar{B} \subset X \subset A$.

• Synthèse: Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\bar{B} \subset X \subset A$.

Alors, $A \cap X = X$ car $X \subset A$

• $B \cap \bar{X} = B$ car $\bar{X} \subset \bar{B}$

D'où $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = X \cup B$

Or $\bar{B} \cup B \subset X \cup B$ donc $E \subset X \cup B$, ainsi $X \cup B = E$

Donc $\ell(X) = E$.

• Conclusion: les solutions sont les $X \in \mathcal{P}(E)$ tels que:

$$\boxed{\bar{B} \subset X \subset A}$$

Problème 2:

1-a) Pour $n=0$, $x_n = x_0 = t$ et $x_{n+1} = x_1 = \sqrt{t}$.

Or $t > 1$ donc $1 \leq \sqrt{t} \leq t$. Ainsi $1 \leq x_{n+1} \leq x_n$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leq x_{n+1} \leq x_n$.

Alors $\sqrt{1} \leq \sqrt{x_{n+1}} \leq \sqrt{x_n}$.

Donc $1 \leq x_{n+2} \leq x_{n+1}$.

• Ainsi, par récurrence:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq x_{n+1} \leq x_n}$$

• (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc (x_n) converge vers $l \geq 1$.

Or: $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ donc, par passage à la limite $l = \sqrt{l}$.

D'où $l=0$ ou $l=1$. Or $l \geq 1$, donc $l=1$.

Ainsi

$$\boxed{\lim x_n = 1}$$

b) Montrons que: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_{n+2} < 1$.

(4)

• Pour $n=0$, comme $t < 1$, on a: $t \leq \sqrt{t} < 1$, donc $x_n \leq x_{n+2} < 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n \leq x_{n+2} < 1$.

Alors $\sqrt{x_n} \leq \sqrt{x_{n+2}} < \sqrt{1}$ donc $x_{n+1} \leq x_{n+3} < 1$.

• Donc, par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_{n+2} < 1$.

• Ainsi (x_n) est croissante et majorée par 1 donc (x_n) converge vers $l \leq 1$.

Or: $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ donc par passage à la limite $l = \sqrt{l}$.

Pour $l=0$ ou $l=1$. Or: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq x_0$ donc $l \geq x_0 > 0$.

Ainsi $l=1$. Donc $\lim x_n = 1$.

2- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_n &= 2^{n+2}(x_{n+2} - 1) - 2^n(x_n - 1) = 2^{n+2}x_{n+2} - 2^{n+1} - 2^n x_n^2 + 2^n \\ &= 2^{n+1}x_{n+2} - 2^n x_n^2 - 2^n \\ &= -2^n (x_n^2 - 2x_{n+1} + 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = -2^n (x_{n+1} - 1)^2}$$

• Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

3- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{x_{n+2}} \right) - 2^n \left(1 - \frac{1}{x_n} \right) \\ &= 2^{n+1} - \frac{2^{n+1}}{x_{n+2}} - 2^n + \frac{2^n}{x_n} \\ &= 2^n - \frac{2^{n+1}}{x_{n+2}} + \frac{2^n}{x_n} \\ &= 2^n \left(1 - \frac{2}{x_{n+2}} + \frac{1}{x_n} \right) \\ &= 2^n \left(1 - \frac{1}{x_{n+1}} \right)^2 \end{aligned}$$

• Donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$, donc $\boxed{(v_n) \text{ est croissante.}}$

4- Soit $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_m - v_m &= 2^m(x_m - 1) - 2^m\left(1 - \frac{1}{x_m}\right) \\&= 2^m\left(x_m - 2 + \frac{1}{x_m}\right) \\&= \frac{2^m}{x_m}(x_m^2 - 2x_m + 1) \\&= \frac{2^m}{x_m}(x_m - 1)^2\end{aligned}$$

Or $x_m \geq 0$ donc $\boxed{u_m - v_m \geq 0.}$

5- Comme (u_n) est décroissante, on a: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0$.

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq u_0$.

Ainsi (v_n) est croissante et majorée par u_0 donc $\boxed{(v_n) \text{ est convergente.}}$

• Comme (v_n) est croissante, on a: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq v_0$.

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n \geq v_0$.

Ainsi (u_n) est décroissante et minorée par v_0 donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$

6- D'après 1, on a, dans tous les cas, $\lim x_n = 1$.

Or: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{x_n}$. Donc: $\boxed{\lim u_n = \lim v_n.}$

7- Comme (u_n) est décroissante et (v_n) croissante, on a:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq L \leq u_n.}$$

• En particulier $v_0 \leq L \leq u_0$

Or $u_0 = x_0 - 1 = t - 1$ et $v_0 = 1 - \frac{1}{x_0} = 1 - \frac{1}{t}$.

Donc $\boxed{1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1.}$

8- Pour $t=1$, on a: $x(1)=1$ donc, par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n^{(1)} = 1$.

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^{(1)} = 0$, ainsi $\lim u_n(1) = 0$

Donc $\boxed{f(1) = 0.}$

9). Soit $t \in \mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}$, on a: $1 - \frac{1}{t} \leq f(t) \leq t - 1$

(6)

Donc $\frac{t-1}{t} \leq f(t) \leq t-1$.

• si $t > 1$, $\frac{1}{t} \leq \frac{f(t)}{t-1} \leq 1$

Or $\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1}{t} = 1$ donc, par théorème d'encadrement: $\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{f(t)}{t-1} = 1$.

• si $t < 1$, $\frac{1}{t} \geq \frac{f(t)}{t-1} \geq 1$.

Donc, de même: $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{f(t)}{t-1} = 1$.

Ainsi $\boxed{\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)}{t-1} = 1}$.

• Comme $f(1) = 0$, on a: $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t-1} = 1$.

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } f'(1) = 1}$.

10-a) Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^{++}$.

• Pour $n=0$, $x_n(t_1 t_2) = t_1 t_2 = x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n(t_1 t_2) = x_n(t_1) x_n(t_2)$

Alors $\sqrt{x_n(t_1 t_2)} = \sqrt{x_n(t_1)} \sqrt{x_n(t_2)}$

Donc $x_{n+1}(t_1 t_2) = x_{n+1}(t_1) x_{n+1}(t_2)$.

• Donc, par récurrence: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n(t_1 t_2) = x_n(t_1) x_n(t_2)}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t_1 t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2)$$

$$= 2^n (x_n(t_1 t_2) - 1 - (x_n(t_1) - 1) - (x_n(t_2) - 1))$$

$$= 2^n (x_n(t_1) x_n(t_2) - x_n(t_1) - x_n(t_2) + 1)$$

$$= 2^n (x_n(t_1) - 1)(x_n(t_2) - 1)$$

$$= u_n(t_1) (x_n(t_2) - 1)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t_1) = f(t_1)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n(t_2) - 1) = 0$

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n(t_1 t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2)) = 0}$.

2) Comme : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = f(t)$, on a :

(7)

$$\boxed{f(t_1 t_2) = f(t_1) + f(t_2)}$$

11-a) , Soit $t > 0$ et h tel que $t+h > 0$.

$$f(t+h) = f\left(t\left(1+\frac{h}{t}\right)\right) = f(t) + f\left(1+\frac{h}{t}\right)$$

Donc $\boxed{f(t+h) - f(t) = f\left(1+\frac{h}{t}\right)}$

b) On a donc : $\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{1}{h} f\left(1+\frac{h}{t}\right)$
 $= \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{h} f\left(1+\frac{h}{t}\right)$.

Or : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \left(1+\frac{h}{t}\right) = 1$ donc, par composition :

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{t}\right)}{\left(1+\frac{h}{t}\right)-1} = 1$. Ainsi : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t}{h} f\left(1+\frac{h}{t}\right) = 1$.

D'où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{1}{t}$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable en } t \text{ et } f'(t) = \frac{1}{t}}$.

c) Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) = \ln(t) + C$.

Or $f(1) = 0$ donc $C = 0$.

Ainsi : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) = \ln(t)}$.

12- . Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = t^{\frac{1}{2^n}}$.

. Pour $n=0$, $t^{\frac{1}{2^0}} = t = x_0$

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n = t^{\frac{1}{2^n}}$.

$x_{n+1} = \sqrt{x_n} = \left(t^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2^{n+1}}}$

. Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = t^{\frac{1}{2^n}}}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = 2^n (x_n - 1) = 2^n \left(t^{\frac{1}{2^n}} - 1 \right) = 2^n \left(e^{\frac{1}{2^n} \ln(t)} - 1 \right)$$

On $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \ln(t) = 0$, donc, par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2^n} \ln t} - 1}{\frac{\ln t}{2^n}} = 1.$$

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n (e^{\frac{1}{2^n} \ln t} - 1) = \ln t$$

$$\text{Donc } \lim u_n = \ln t.$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{f(t) = \ln t.}$$

⑧