

Problème 1:

1-a)
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 0 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 2 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = 2I + M$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 0 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 2 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix}$$

Posons $a = 1$ et $b = 2$, on a: $M^2 = aM + bI$.

b) On a: $\frac{1}{2}(M^2 - M) = I$ donc $\frac{1}{2}M(M - I) = I$.

Alors

M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & -1 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & -1 \end{pmatrix}$.

c) $M^2X = M \cdot MX = M \cdot \lambda X = \lambda MX = \lambda \cdot \lambda X = \lambda^2 X$

Donc $2X + MX = \lambda^2 X$. Alors $2X + \lambda X = \lambda^2 X$.

D'où $(\lambda^2 - \lambda - 2)X = 0$. Or $X \neq 0$ donc $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

Alors

$\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$

2-a) $PQ = -\frac{1}{9}(M + I)(M - 2I) = -\frac{1}{9}(M^2 + M - 2M - 2I)$

$= -\frac{1}{9}(2I + M - M - 2I)$ donc $PQ = 0$.

$QP = -\frac{1}{9}(M - 2I)(M + I) = PQ$ car M et I commutent.

Donc: $QP = 0$

$P^2 = \frac{1}{9}(M + I)^2 = \frac{1}{9}(M^2 + 2M + I)$ car M et I commutent.

$= \frac{1}{9}(2I + M + 2M + I) = \frac{1}{3}(M + I)$. Donc $P^2 = P$.

$Q^2 = -\frac{1}{9}(M - 2I)^2 = -\frac{1}{9}(M^2 - 4M + 4I)$ car M et I commutent.

$= \frac{1}{9}(2I + M - 4M + 4I) = \frac{1}{3}(2I - M)$. Donc $Q^2 = Q$.

2-a) Montrons que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P^n = P$ et $Q^n = Q$

• Pour $n=1$, $P^1 = P = P$ et $Q^1 = Q = Q$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P^n = P$ et $Q^n = Q$.

$$\text{Alors } P^{n+1} = P^n \cdot P = P^2 = P \text{ et } Q^{n+1} = Q^n \cdot Q = Q^2 = Q$$

• Dm, par récurrence:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P^n = P \text{ et } Q^n = Q.}$$

4) On a: $M+I = 3P$ et $M-2I = -3Q$.

$$\text{Dm } 2(M+I) + M-2I = 6P-3Q.$$

$$\text{Ainsi } 3M = 6P-3Q \text{ d'où } M=2P-Q.$$

• Comme $PQ = QP = 0$, on a:

$$M^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2P)^k (-Q)^{n-k}$$

$$= (-Q)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} \cancel{PQ} + (2P)^n$$

$$= (-1)^n Q^n + 2^n P^n$$

$$\text{Dm } \boxed{M^n = 2^n P + (-1)^n Q.}$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\bullet \text{ si } n \neq 0, M^n = 2^n P + (-1)^n Q$$

$$\bullet \text{ si } n=0, 2^0 P + (-1)^0 Q = P+Q = I = M^0$$

$$\text{Dm } M^n = 2^n P + (-1)^n Q = \frac{2^n}{3}(M+I) - \frac{(-1)^n}{3}(M-2I)$$

• Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, M^n = a_n I + b_n M \text{ avec } b_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } a_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}}$$

$$\text{e) Pour } n=-1, a_n = \frac{2^{-1} + 2(-1)^{-1}}{3} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{2^{-1} - (-1)^{-1}}{3} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$a_n I + b_n M = -\frac{1}{2} I + \frac{1}{2} M = M^{-1}$$

$$\text{Dm } \boxed{\text{la formule est vraie pour } n=-1}$$

Problème 2:

(3)

1-a) En posant $x=y=1$, on a : $f(1) = f(1) + f(1)$. Donc $\boxed{f(1) = 0}$.

b) Soit $x, y \in]0, +\infty[$, en appliquant (+) à x et $\frac{y}{x}$, on a : $f(x \cdot \frac{y}{x}) = f(x) + f(\frac{y}{x})$.

Donc $\boxed{f(y) - f(x) = f(\frac{y}{x})}$.

2-a) Soit $x \in]0, +\infty[$, on a $\lim_{y \rightarrow x} \frac{y}{x} = 1$ et, comme f est continue en 1, $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = f(1) = 0$.

Donc, par composition, $\lim_{y \rightarrow x} f(\frac{y}{x}) = 0$. Ainsi $\lim_{y \rightarrow x} (f(y) - f(x)) = 0$.

D'où : $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$. Ainsi f est continue en x .

Donc $\boxed{f \text{ est continue sur }]0, +\infty[}$.

b) Soit $x \in]0, +\infty[$.

• Pour $n=0$, $f(x^n) = f(1) = 0 = n f(x)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f(x^n) = n f(x)$.

$$f(x^{n+1}) = f(x^n \cdot x) = f(x^n) + f(x) = n f(x) + f(x) = (n+1) f(x).$$

• Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x^n) = n f(x)$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Soit } n \in \mathbb{Z}^{-*}, \quad f(x^n) &= f\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = f(1) - f(x^{-n}) \quad \text{d'après 1. b} \\ &= -f(x^{-n}) = -(-n) f(x) \quad \text{car } -n \in \mathbb{N} \\ &= n f(x). \end{aligned}$$

• Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(x^n) = n f(x)}$.

c) Soit $x \in]0, +\infty[$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

D'après 2. b, $f((x^{1/q})^q) = q f(x^{1/q})$

Donc $\boxed{f(x^{1/q}) = \frac{f(x)}{q}}$

d) Soit $x \in]0, +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$.

$$f(x^r) = f((x^{1/q})^p) = p f(x^{1/q}) = p \frac{f(x)}{q} = r f(x).$$

Donc $\boxed{f(x^r) = r f(x)}$

e) Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe (r_n) suite de $\mathbb{Q}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, f(e^{r_n}) = r_n f(e)$.

Or f est continue sur $]0, +\infty[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(e^{r_n}) = f(e^x)$.

Ainsi, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n f(e) = x f(e)$, on a : $\boxed{f(e^x) = x f(e)}$.

f) Soit $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = f(e^{\ln x}) = \ln(x) \cdot f(e)$.

Pose $a = f(e)$. On a : $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = a \ln(x)}$.

3- Analyse: Supposons qu'il existe f continue en 1 vérifiant (*).

Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f: x \mapsto a \ln(x)$.

• Synthèse: Posons $f: x \mapsto a \ln(x)$, $a \in \mathbb{R}$.

Alors f est continue en 1 et :

$$\forall x, y \in]0, +\infty[, f(xy) = a \ln(xy) = a \ln x + a \ln y = f(x) + f(y).$$

Donc f vérifie (*).

• Conclusion: les solutions sont :

$$\boxed{\begin{array}{l}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a \ln(x) \end{array}, a \in \mathbb{R}.$$