CORRECTION
DM 7

1-a) • $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

• Pour $n=1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Posons $P_1 = 1$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)(1+x^2)^n - P_n(x) \cdot n\, 2x(1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}}$$

$$= \frac{P_n'(x)(1+x^2) - 2nx P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Posons $P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2nXP_n$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

• Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n} \text{ et } P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2nXP_n.}$

b) • D'après la question précédente : $P_1 = 1$

• $P_2 = (1+X^2)P_1' - 2XP_1 = -2X$

• $P_3 = (1+X^2)P_2' - 4XP_2 = -2(1+X^2) + 8X^2 = 6X^2 - 2$.

Donc : $\boxed{P_1 = 1, \quad P_2 = -2X \text{ et } P_3 = 6X^2 - 2}$

c) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note c_n le coefficient dominant de P_n.

• Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} \deg P_n = n-1 \\ c_n = (-1)^{n-1} n! \end{cases}$

- Pour $n=1$, $P_n = P_1 = 1$

donc $\deg P_n = 0 = n-1$ et $c_n = 1 = (-1)^{n-1} n!$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\deg P_n = n-1$ et $c_n = (-1)^{n-1} n!$

Alors $P_n = (-1)^{n-1}\, n!\, X^{n-1} + Q_n$ où $\deg Q_n \leq n-2$.

- Si $n \neq 1$, on a $P_n' = (-1)^{n-1} n!\,(n-1) X^{n-2} + Q_n'$ où $\deg Q_n' \leq n-3$

Donc
$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (1+X^2) P_n' - 2nXP_n \\
&= (-1)^{n-1}(1+X^2)\, n!\,(n-1) X^{n-2} + (1+X^2) Q_n' \\
&\quad - 2n(-1)^{n-1} n!\, X^n - 2nXQ_n \\
&= \left((-1)^{n-1} n!\,(n-1) - 2n(-1)^{n-1} n!\right) X^n \\
&\quad + \underbrace{(-1)^{n-1} n!\,(n-1) X^{n-2} + (1+X^2) Q_n' - 2nXQ_n}_{=R_n} \\
&= (-1)^{n-1} n!\,(n-1-2n) X^n + R_n \quad \text{où } \deg R_n \leq n-1 \\
&= (-1)^n (n+1)!\, X^n + R_n
\end{aligned}$$

Comme $(-1)^n (n+1)! \neq 0$, on a $\deg P_{n+1} = n$ et $c_{n+1} = (-1)^n (n+1)!$

- Si $n=1$, $P_{n+1} = P_2 = -2X$ donc $\deg P_{n+1} = 1 = n$ et $c_{n+1} = -2 = (-1)^n (n+1)!$

- Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \deg P_n = n-1 \text{ et } c_n = (-1)^{n-1} n!}$

2-a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{Arctan} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

Donc $g(x) = -\dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{2x}{1+x^2}$

Ainsi : $\boxed{g(x) = 0}$

b)
- Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g^{(n)}(x) = 0$.
- Posons $h_1 : x \mapsto 1+x^2$ et $h_2 : x \mapsto 2x$.

On a $g = h_1 f'' + h_2 f'$. Donc, d'après la formule de Leibniz : $g^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_1^{(k)} (f'')^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_2^{(k)} (f')^{(n-k)}$

Ainsi $g^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_1^{(k)} f^{(n+2-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_2^{(k)} f^{(n+1-k)}$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $h_1^{(k)}(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si } k=0 \\ 2x & \text{si } k=1 \\ 2 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$ et $h_2^{(k)}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } k=0 \\ 2 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g^{(n)}(x) = (1+x^2) f^{(n+2)}(x) + 2nx f^{(n+1)}(x) + 2\frac{n(n-1)}{2} f^{(n)}(x)$

$$+ 2x f^{(n+1)}(x) + 2n f^{(n)}(x)$$

$$= (1+x^2) f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1) f^{(n+1)}(x) + n(n+1) f^{(n)}(x).$$

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x^2) f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1) f^{(n+1)}(x) + n(n+1) f^{(n)}(x) = 0.}$

c) Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)\dfrac{P_{n+2}(x)}{(1+x^2)^{n+2}} + 2x(n+1)\dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} + n(n+1)\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n} = 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{n+2}(x) + 2x(n+1)P_{n+1}(x) + n(n+1)(1+x^2)P_n(x) = 0$.

D'où : $\boxed{P_{n+2} + 2X(n+1)P_{n+1} + n(n+1)(1+X^2)P_n = 0}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2XP_n$

et $P_{n+2} = (1+X^2)P_{n+1}' - 2(n+1)XP_{n+1}$

$= (1+X^2)\left(2XP_n' + (1+X^2)P_n'' - 2nP_n - 2nXP_n'\right)$

$- 2(n+1)X\left((1+X^2)P_n' - 2nXP_n\right)$

$= (1+X^2)^2 P_n'' - 4nX(1+X^2)P_n' - 2n\left(1+X^2 - 2(n+1)X^2\right)P_n$

Ainsi : $(1+X^2)^2 P_n'' - 4nX(1+X^2)P_n' - 2n\left(1+X^2 - 2(n+1)X^2\right)P_n$

$+ 2X(n+1)\left((1+X^2)P_n' - 2nXP_n\right) + n(n+1)(1+X^2)P_n = 0$

D'où : $(1+X^2)^2 P_n'' + 2X(1-n)(1+X^2)P_n' + n(n-1)(1+X^2)P_n = 0$.

Donc : $\boxed{(1+X^2)P_n'' - 2X(n-1)P_n' + n(n-1)P_n = 0}$

3-a) • Pour $n=1$, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(n-1)!\cos^n(f(x))\sin(n(f(x)+\tfrac{\pi}{2})) = \cos(\mathrm{Arctan}\,x)\sin(\mathrm{Arctan}\,x + \tfrac{\pi}{2})$$
$$= \cos^2(\mathrm{Arctan}\,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2} = f'(x) = f^{(n)}(x).$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin(n(f(x)+\frac{\pi}{2}))$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = -(n-1)!\,n\sin(f(x))\cos^{n-1}(f(x))\sin(n(f(x)+\tfrac{\pi}{2}))f'(x)$$
$$+ (n-1)!\cos^n(f(x))\,n\cos(n(f(x)+\tfrac{\pi}{2}))f'(x)$$

$$= n!f'(x)\cos^{n-1}(f(x))\left(-\sin(f(x))\sin(n(f(x)+\tfrac{\pi}{2}))\right.$$
$$\left.+\cos(f(x))\cos(n(f(x)+\tfrac{\pi}{2}))\right)$$

$$= n!f'(x)\cos^{n-1}(f(x))\cos(f(x)+n(f(x)+\tfrac{\pi}{2}))$$
$$= n!\frac{1}{1+x^2}\cos^{n-1}(f(x))\cos((n+1)(f(x)+\tfrac{\pi}{2})-\tfrac{\pi}{2})$$
$$= n!\cos^2(f(x))\cos^{n-1}(f(x))\sin((n+1)(f(x)+\tfrac{\pi}{2}))$$
$$= n!\cos^{n+1}(f(x))\sin((n+1)(f(x)+\tfrac{\pi}{2}))$$

• Donc, par récurrence :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin(n(f(x)+\tfrac{\pi}{2}))}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = 0 \iff f^{(n)}(x) = 0$

$$\iff \cos^n(f(x))\sin(n(f(x)+\tfrac{\pi}{2})) = 0$$
$$\iff \cos(f(x)) = 0 \text{ ou } \sin(n(f(x)+\tfrac{\pi}{2})) = 0$$
$$\iff f(x) \equiv \tfrac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ ou } n(f(x)+\tfrac{\pi}{2}) \equiv 0\ [\pi]$$

Or $f(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc :

$$P_n(x)=0 \iff \exists k\in\mathbb{Z},\ f(x)+\frac{\pi}{2}=\frac{k\pi}{n}$$

$$\iff \exists k\in[\![1,n-1]\!],\ f(x)+\frac{\pi}{2}=\frac{k\pi}{n} \qquad \text{car } f(x)+\frac{\pi}{2}\in]0,\pi[$$

$$\iff \exists k\in[\![1,n-1]\!],\ f(x)=\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}$$

$$\iff \exists k\in[\![1,n-1]\!],\ x=\tan\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right).$$

Donc $\boxed{\text{les racines réelles de } P_n \text{ sont : } \tan\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right),\ k\in[\![1,n-1]\!].}$

c) • $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et tan strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

donc les $\tan\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in[\![1,n-1]\!]$ sont 2 à 2 distincts.

• comme $\deg P_n = n-1$:

$$P_n = c_n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\tan\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Ainsi $$\boxed{P_n = (-1)^{n-1}n!\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\tan\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

4-a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

• Pour $n=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}=\frac{1}{x+a}=\varphi^{(0)}(x)=\varphi^{(n)}(x)$

• Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$, $\varphi^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^n n!\,(-(n+1))}{(x+a)^{n+2}}=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+a)^{n+2}}$.

• Donc, par récurrence :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}.}$$

b) Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(x+i)(x-i)}=\frac{x+i-(x-i)}{2i(x+i)(x-i)}$$

$$=\frac{1}{2i}\frac{1}{x-i}-\frac{1}{2i}\frac{1}{x+i}$$

Donc $\boxed{b=i \text{ convient.}}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$

donc $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-i)^n} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+i)^n}\right)$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left(\frac{(x+i)^n - (x-i)^n}{(x-i)^n(x+i)^n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i\,(x^2+1)^n}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} i^l x^{n-l} - \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(-i)^l x^{n-l}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i\,(x^2+1)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} i^l \underbrace{\left(1-(-1)^l\right)}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ pair} \\ 2 & \text{si } l \text{ impair.}\end{cases}} x^{n-l}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i\,(x^2+1)^n}\sum_{0 \le 2p+1 \le n}\binom{n}{2p+1} i^{2p+1}\cdot 2\, x^{n-(2p+1)}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i\,(x^2+1)^n}\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2p+1}(-1)^p\, 2i\, x^{n-2p-1}$$

Donc $$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^n}\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2p+1}(-1)^p x^{n-1-2p}.}$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2p+1}(-1)^p x^{n-1-2p}$.

Ainsi $$\boxed{P_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2p+1}(-1)^p X^{n-1-2p}.}$$

5-a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'''(x) = -\dfrac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2 \cdot 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	0

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{9}{8\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{3\sqrt{3}}{8} \leq f''(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f''(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} = \left|f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|$

Donc $\boxed{|f''| \text{ admet un maximum } M = \frac{3\sqrt{3}}{8}.}$

b) Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. On a $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = f'(x) - 1 \quad , \quad g''(x) = f''(x)$

Donc $|g''| \leq M$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g'(x) - g'(0)| \leq M|x - 0| \qquad$ or $g'(0) = f'(0) - 1 = 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \ |g'(x)| \leq M|x|$.

Donc : $\forall x \in \left[0, \frac{\ell}{n^2}\right], \ |g'(x)| \leq \frac{M\ell}{n^2}$.

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\left|g\left(\frac{\ell}{n^2}\right) - g(0)\right| \leq \frac{M\ell}{n^2}\left|\frac{\ell}{n^2} - 0\right|$$ Or $g(0) = 0$

Donc $$\boxed{\left|f\left(\frac{\ell}{n^2}\right) - \frac{\ell}{n^2}\right| \leq \frac{M\ell^2}{n^4}}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{k}{n^2} \right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{k}{n^2} \right| + \left| \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2} \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{M k^2}{n^4} + \frac{1}{2} \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right|$$

Donc $\boxed{\left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{M}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2n}}$

d) D'où $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{M}{n^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{M}{n^3} \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2n} = 0.$

Donc $\boxed{\lim u_n = \frac{1}{2}.}$