CORRECTION
DM 8

Problème 1 :

1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Donc, par primitivation, $\operatorname{Arcsin} x \underset{0}{=} \operatorname{Arcsin} 0 + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

D'où : $\boxed{\operatorname{Arcsin} x \underset{0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$

2-a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable et : $\forall x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$, $f_n'(x) = (-1)^n \cos x + \frac{1}{x^2}$.

Or, sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$, cos est du signe de $(-1)^n$ donc : $\forall x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$, $(-1)^n \cos x \geqslant 0$.

Ainsi $f_n' > 0$ donc f_n est strictement croissante.

De plus f_n est continue donc f_n est bijective de $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$ vers $[f(n\pi), f(n\pi + \frac{\pi}{2})]$. Or $\sin(n\pi) = 0$ et $\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$.

Donc $\boxed{f_n \text{ est bijective de } [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}] \text{ vers } [-\frac{1}{n\pi}, 1 - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}]}$

b) Soit $x \in]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, $\sin x$ est du signe de $(-1)^n$ donc $|\sin x| = (-1)^n \sin x$.

Ainsi : $|x \sin x| = 1 \iff x(-1)^n \sin x = 1 \iff (-1)^n \sin x - \frac{1}{x} = 0$

$\iff f_n(x) = 0$.

Comme $0 \in]-\frac{1}{n\pi}, 1 - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}[$, et f_n bijective de $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ vers $]-\frac{1}{n\pi}, 1 - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution.

Donc : $\boxed{|x \sin x| = 1 \text{ admet une unique solution dans }]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[}$

3- On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$. Or $n\pi + \frac{\pi}{2} \sim n\pi$.

Donc : $\boxed{x_n \sim n\pi}$.

4-a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(y_n) = \sin(x_n - n\pi) = (-1)^n \sin(x_n) = \frac{1}{x_n}$.

Or $y_n \in]0, \frac{\pi}{2}[\subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\boxed{y_n = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{x_n}}$

b) On a : $\operatorname{Arcsin} x \underset{0}{\sim} x$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$ donc $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{x_n}$.

Or $x_n \sim n\pi$ donc : $\boxed{y_n \sim \frac{1}{n\pi}}$

5-a) On a : $y_n = \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $z_n = y_n - \frac{1}{n\pi}$ donc :

$$\boxed{z_n = o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin\left(\frac{1}{n\pi} + z_n\right) = \sin(x_n - n\pi) = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{z_n + n\pi + \frac{1}{n\pi}}$

Or : $z_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

donc : $\boxed{\frac{1}{n\pi} + z_n = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n}\right)}$

c) $\frac{1}{n\pi} + z_n = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{(n\pi)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right)$

$= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{(n\pi)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$

$= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n^3\pi^3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n^3\pi^3}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n^3\pi^3} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= \frac{1}{n\pi} - \frac{5}{6}\frac{1}{n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Or $\frac{1}{n\pi} + z_n = x_n - n\pi$, d'où :

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{5}{6}\frac{1}{n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}.$$

Problème 2 :

A) 1- Comme $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$,

$\boxed{f \text{ est définie sur } D = \mathbb{R}^{+} \setminus \{1\}}$.

2- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{\ln x}$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$.

3- • f est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$.

• f est dérivable en 0.

• Soit $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{(\ln x)^2}$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Ainsi f' est continue en 0 donc f est $\mathcal{C}^1$ en 0.

Ainsi $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, 1[}$.

4- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

B) 1- • Pour $n = 0$, $v_n = 3 \geq e$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $v_n \geq e$.
Comme f croissante sur $[e, +\infty[$, on a : $f(v_n) \geq f(e)$. Donc $v_{n+1} \geq e$.

• Ainsi, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n \geq e}$.

2- • Pour $n = 0$ $v_{n+1} - v_n = f(3) - 3 = \dfrac{3}{\ln 3} - 3 = \dfrac{3(1 - \ln 3)}{\ln 3} \leq 0$ car $3 \geq e$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $v_{n+1} \leq v_n$.
Comme $v_{n+1}, v_n \in [e, +\infty[$ et f croissante sur $[e, +\infty[$, on a :

$f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$. Donc $v_{n+2} \leq v_{n+1}$.

• Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} \leq v_n$.

- Ainsi (v_n) est décroissante et minorée par e. Donc :

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers } \ell \in [e, +\infty[.}$$

- Comme f est continue, on a : $f(\ell) = \ell$.

Or : $f(\ell) = \ell \iff \dfrac{\ell}{\ln \ell} = \ell \iff \ln \ell = 1$ car $\ell \neq 1$

$\iff \ell = e$.

Donc : $\boxed{\lim v_n = e}$.

3- Soit $x \geqslant e$, on a : $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

- Or $x \geqslant e$ donc $\ln x \geqslant 1$, ainsi $f'(x) \geqslant 0$.
- De plus $f'(x) - \dfrac{1}{4} = \dfrac{4\ln x - 4 - (\ln x)^2}{4(\ln x)^2} = -\dfrac{(\ln x - 2)^2}{4(\ln x)^2} \leq 0$

Donc : $\boxed{0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}.}$

4- Soit f dérivable sur I telle qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f' \leq M$.

Alors : $\forall x, y \in I,\ x \geqslant y,\quad m(x-y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x-y)$.

5- Soit $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable sur $[e, +\infty[$. Donc en appliquant l'inégalité des accroissements finis entre v_n et e, on a :

$$0 \leq f(v_n) - f(e) \leq \frac{1}{4}(v_n - e)$$

D'où $\quad 0 \leq v_{n+1} - e \leq \dfrac{1}{4}(v_n - e)$.

Ainsi, par récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad |v_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}|v_0 - e|$

Or $|v_0 - e| = 3 - e \leq 1$.

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.}$

6- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $4^5 > 10^3$ donc $4^{20} > 10^{12}$

Ainsi, pour $n_1 = 20$, si $n \geqslant n_1$,

$$|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{4^{20}} \leq 10^{-12}.$$

Donc $\boxed{v_n \text{ est une valeur approchée de } e \text{ à } 10^{-12} \text{ près.}}$

C) 1- . g' est du signe de h.

. h est dérivable sur $D\setminus\{0\}$ et, soit $x \in D\setminus\{0\}$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2).2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)^2 - 4x}{x(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{x(1+x^2)^2} \geq 0.$$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
h	‖	$\nearrow$ 0	‖	0 $\nearrow$	
$g'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	
g	‖	$\searrow$	‖	$\nearrow$	

2) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$, $g(x) = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x-1}{\ln x}$. Or $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$,

$$f(x) - g(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{x^2-1}{x\ln x} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x\ln x} = \frac{1}{x\ln x}.$$

Donc $\boxed{\text{sur }]0,1[\text{, } f \text{ est en dessous de } g \text{ et sur }]1,+\infty[\text{, } f \text{ est au dessus de } g}$

4) Sur $[2,e]$, on a $f \geq g$. Donc l'aire recherchée est :

$$\int_2^e (f-g) = \int_2^e \frac{1}{x\ln x}\,dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_2^e = \ln(1) - \ln(\ln 2)$$

Donc l'aire est : $\boxed{-\ln(\ln 2)}$

D) 1- On a $\forall x \in K,\ z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$

Donc : $\forall x \in K,\ z'(x) = -\dfrac{y'(x)}{y^2(x)}$

Ainsi : $-x^2 z'(x) + x\, z(x) = z^2(x) \iff \forall x \in K,\ \dfrac{x^2 y'(x)}{y^2(x)} + \dfrac{x}{y(x)} = \dfrac{1}{y^2(x)}$

$\iff \forall x \in K,\ x^2 y'(x) + x y(x) = 1$

Donc y est solution de : $\boxed{x^2 y' + x y = 1 \quad (E_2)}$.

2- On résout $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}$ (E_2)

. On résout : $y' + \frac{1}{x} y = 0$ (E_0)

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln x$. Donc les solutions de (E_0) sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} K \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-\ln x} = \dfrac{\lambda}{x} \end{array} ,\ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

. D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de (E_2) sur K de la forme : $y : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x}$ avec λ dérivable.

$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} \iff \forall x \in K,\ \dfrac{\lambda'(x)}{x} = \dfrac{1}{x^2}$

$\iff \forall x \in K,\ \lambda'(x) = \frac{1}{x}$.

Donc $\lambda : x \mapsto \ln x$ convient et $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est solution de (E_2).

. Donc les solutions de (E_2) sont : $\boxed{\begin{array}{l} K \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\lambda + \ln x}{x} \end{array} ,\ \lambda \in \mathbb{R}.}$

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $a = e^{\lambda}$. On a $\lambda = \ln a$.

Donc les solutions de (E_2) sont de la forme : $x \mapsto \dfrac{\ln a + \ln x}{x} = \dfrac{\ln(ax)}{x}$

c'est-à-dire : $\boxed{g_a : x \mapsto \dfrac{\ln(ax)}{x} ,\ a > 0}$

. g_a s'annule en $\frac{1}{a}$ or, si $a > 1$, $\frac{1}{a} \notin K$. Donc si

$\boxed{\text{si } a > 1,\ g_a \text{ ne s'annule pas sur } K.}$

E] 1- f est continue sur $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ donc $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est définie sur $[0,1[$

Ainsi $\boxed{H \text{ est définie sur } J =]0,1[}$

2- Soit F une primitive de f. Soit $x \in]0,1[$.

$H(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = F'(0) = f(0)$.

Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} H(x) = 0.}$

3- • $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\frac{1}{2} < 1 < \frac{3}{2}$.

Donc, il existe $a \in]0,1[$ tel que : $\forall x \in [a,1[$, $\frac{1}{2} \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{3}{2}$.

D'où : $\boxed{\forall x \in [a,1[\,,\quad \frac{3}{2}(x-1) \leq \ln x \leq \frac{1}{2}(x-1)}$

• Soit $x \in [a,1[$,

$H(x) = \frac{1}{x}\int_0^a f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_a^x f(t)\,dt$.

• $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x}\int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$.

• Soit $t \in [a,1[$, $\dfrac{2}{t-1} \leq \dfrac{1}{\ln t} \leq \dfrac{2}{3(t-1)}$

Donc $\dfrac{2t}{t-1} \leq \dfrac{t}{\ln t} \leq \dfrac{2t}{3(t-1)}$

D'où $2 + \dfrac{2}{t-1} \leq f(t) \leq \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3(t-1)}$.

Donc $2\int_a^x \left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt \leq \int_a^x f(t)\,dt \leq \frac{2}{3}\int_a^x \left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt$

Or : $\int_a^x \left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt = \left[t + \ln|t-1|\right]_a^x = x + \ln(1-x) - a - \ln(1-a)$

Donc $2\left(1 + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{a+\ln(1-a)}{x}\right) \leq \frac{1}{x}\int_a^x f(t)\,dt \leq \frac{2}{3}\left(1 + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{a+\ln(1-a)}{a}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to 1^-} 1 + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{a+\ln(1-a)}{x} = -\infty$.

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} H(x) = -\infty}$