

Exercice 1:

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a: $\sum_{k=1}^n z^{2k} = \sum_{k=1}^n (z^2)^k = \begin{cases} \frac{z^2 - z^{2(n+1)}}{1 - z^2} & \text{si } z^2 \neq 1 \\ n & \text{si } z^2 = 1 \end{cases}$

• Si $z^2 = 1$, c'est-à-dire $z = \pm 1$, alors $\sum_{k=1}^n z^{2k} = n$

• Si $z^2 \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^n z^{2k} = -1 \Leftrightarrow \frac{z^2 - z^{2(n+1)}}{1 - z^2} = -1 \Leftrightarrow z^2 - z^{2(n+1)} = z^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow z^{2n+2} = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_{2n+2}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 2n+1\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{2n+2}} = e^{\frac{ik\pi}{n+1}}$$

De plus, sur $k \in \{0, 2n+1\}$, $e^{\frac{ik\pi}{n+1}} = 1 \Leftrightarrow k = 0$

et $e^{\frac{ik\pi}{n+1}} = -1 \Leftrightarrow k = n+1$

Donc, l'ensemble des solutions est:

$$\left\{ e^{\frac{ik\pi}{n+1}}, k \in \{1, 2, \dots, 2n+1\} \setminus \{n+1\} \right\}$$

Exercice 2:

1) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\left(\forall t \in]0, 1[, \frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall t \in]0, 1[, \frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{a(1-t^2) + b t^2(1-t) + c t^2(1+t)}{t^2(1-t^2)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall t \in]0, 1[, 1 = (b-c)t^3 + (b+c-a)t^2 + a \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-c=0 \\ b+c-a=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-c=0 \\ b+c=1 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc: $\forall t \in]0, 1[, \frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+t}$

2) Donner une primitive sur $]0,1[$ de $t \mapsto \frac{1}{t^2(1-t^2)}$ en :

(2)

$$]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \ln|1-t| + \frac{1}{2} \ln|1+t|$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{array}{l}]0,1[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \end{array}}$$

3) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On calcule $\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 u \cos u} du$.

On effectue le changement de variable $t = \sin u$. On a $dt = \cos u du$ donc :

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 u \cos u} du = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin^2 u \cos^2 u} du = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin^2 u (1 - \sin^2 u)} du$$

$$= \int_{\sin x}^1 \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) \text{ d'après 2.}$$

Donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x) \cos(x)}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ est :

$$\boxed{\begin{array}{l}]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) \end{array}}$$

Exercice 3 :

On résout $x(1+x^2)y' - (1-x^2)y = x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, c'est-à-dire : $y' - \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}y = \frac{1}{1+x^2}$ (E)

• On résout : $y' - \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}y = 0$ (E₀).

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1+x^2-2x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2}.$$

Donc une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x \mapsto -\frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$ est $x \mapsto -\ln x + \ln(1+x^2) = \ln\left(\frac{1+x^2}{x}\right)$

Donc les solutions de (E₀) sont : $\mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \lambda e^{-\ln\left(\frac{1+x^2}{x}\right)} = \frac{\lambda x}{1+x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de (E) de la forme $y: \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$ avec λ dérivable.
- $$\lambda \mapsto \lambda(x) \frac{x}{1+x^2}$$

(3)

On a: $y' - \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} y = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{++}, \lambda'(x) \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{++}, \lambda'(x) = \frac{1}{x}.$$

Donc $\lambda: x \mapsto \ln(x)$ convient et $y: x \mapsto \ln(x) \cdot \frac{x}{1+x^2}$ est solution de (E).

- Donc les solutions de (E) sont:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda + \ln(x)) \frac{x}{1+x^2} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Problème 1:

1) $S_n(z) = \begin{cases} \frac{1-z^n}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ n & \text{si } z = 1. \end{cases}$

Or, si $z \in \mathbb{U}_n$, on a $z^n = 1$. Donc:

$$\boxed{S_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 1 \\ n & \text{si } z = 1 \end{cases}}$$

2-a) Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$S_3(z) = i \Leftrightarrow 1+z+z^2 = i \Leftrightarrow z^2 + z + 1 - i = 0.$$

Le discriminant associé est $\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x+iy)^2 = -3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ 2xy = 4 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x+iy = \pm(1+2i)$$

Donc: $S_3(z) = i \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm (1+2i)}{2}$

Ainsi les solutions sont: $\boxed{i \text{ et } -1-i}$

b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$,

(4)

$$S_3(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 + z + iy + (x + iy)^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \text{Im}(1 + x + iy + x^2 - y^2 + 2ixy) = 0$$

$$\Leftrightarrow y + 2xy = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\mathbb{R} \cup \left\{ z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) = -\frac{1}{2} \right\}.$$

3-a) On a $z \neq 1$ donc $S_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}$.

Or $z^n = e^{i\pi} = -1$. Donc :

$$S_n(z) = \frac{2}{1 - z}.$$

$$\begin{aligned} b) S_n(z) &= \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{2n}}} = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}})} = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}} \times (-2i) \sin(\frac{\pi}{2n})} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2n}} \frac{i}{\sin(\frac{\pi}{2n})} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})} e^{-i\frac{\pi}{2n}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})} e^{i\frac{\pi}{2} \frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Or $\sin \frac{\pi}{2n} > 0$ donc :

$$\begin{aligned} |S_n(z)| &= \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})} \\ \text{et } \text{Arg}(S_n(z)) &= \frac{\pi}{2} \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

4-a) On a $z \neq 1$ donc $S_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}$.

De plus : $z^{n-2} = 1$ donc $z^n = z^2$.

Ainsi : $S_n(z) = \frac{1 - z^2}{1 - z} = \frac{(1 - z)(1 + z)}{1 - z}$. Donc : $S_n(z) = 1 + z$

b) Comme $z \in \mathcal{U}_{n-2} \setminus \{1\}$, il existe $k \in \llbracket 1, n-3 \rrbracket$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{n-2}}$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } S_n(z) &= 1 + e^{\frac{2ik\pi}{n-2}} = e^{i\frac{k\pi}{n-2}} (e^{-i\frac{k\pi}{n-2}} + e^{i\frac{k\pi}{n-2}}) \\ &= 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n-2}\right) e^{i\frac{k\pi}{n-2}} \end{aligned}$$

Or $\frac{k\pi}{n-2} \in [0, \pi]$ donc $\omega(\frac{k\pi}{n-2}) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{k\pi}{n-2} < \frac{\pi}{2}$
 $\Leftrightarrow k < \frac{n-2}{2}$

(5)

Alors

$$|S_n(z)| = 2 \left| \omega\left(\frac{k\pi}{n-2}\right) \right|$$

$$\text{et } \arg(S_n(z)) \equiv \begin{cases} \frac{k\pi}{n-2} \quad [2\pi] & \text{si } k < \frac{n-2}{2} \\ \frac{k\pi}{n-2} + \pi \quad [2\pi] & \text{sinon.} \end{cases}$$

5- a) Comme $z \in \mathbb{U}_{n-1}$, alors $z \in \mathbb{U}$. De plus $z^{n-1} = 1$ donc $z^n = z$.

Alors $S_n(z) = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-z}{1-z} = 1$ donc $|S_n(z)| = 1$.

Donc :

$$z \in E.$$

b) Comme $z \in \mathbb{U}_{n+1}$, alors $z \in \mathbb{U}$. De plus $z^{n+1} = 1$ donc $z^n = \frac{1}{z}$.

Alors $S_n(z) = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-\frac{1}{z}}{1-z} = \frac{\frac{z-1}{z}}{1-z} = -\frac{1}{z}$.

Donc $|S_n(z)| = \frac{1}{|z|} = 1$.

Alors :

$$z \in E.$$

c) i) On a $S_n(1) = n$ donc $1 \notin E$, aussi $z \neq 1$.

Donc $S_n(z) = \frac{1-z^n}{1-z}$ or $|S_n(z)| = 1$. D'où : $\left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| = 1$.

Alors :

$$|z^n - 1| = |z - 1|.$$

ii) On a $|z^n - 1|^2 = |z - 1|^2$ donc $(z^n - 1)(\bar{z}^n - 1) = (z - 1)(\bar{z} - 1)$

Alors $(z\bar{z})^n - \bar{z}^n - z^n + 1 = z\bar{z} - \bar{z} - z + 1$

Or $z\bar{z} = |z|^2 = 1$ donc $2 - \bar{z}^n - z^n = 2 - \bar{z} - z$.

D'où :

$$\bar{z}^n + z^n = \bar{z} + z.$$

Comme $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

(6)

On a donc $e^{-in\theta} + e^{in\theta} = e^{-i\theta} + e^{i\theta}$

Donc $\omega(n\theta) = \omega(\theta)$

D'où $n\theta \equiv \theta \pmod{2\pi}$ ou $n\theta \equiv -\theta \pmod{2\pi}$

Ainsi $\theta \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{n-1}}$ ou $\theta \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{n+1}}$

Donc : $\exists h \in \mathbb{Z}, z = e^{i\frac{2h\pi}{n-1}}$ ou $\exists h \in \mathbb{Z}, z = e^{i\frac{2h\pi}{n+1}}$.

D'où $z \in \mathbb{U}_{n-1}$ ou $z \in \mathbb{U}_{n+1}$.

d) On a donc : $E = (\mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}) \setminus \{1\}$.

Problème 2:

1-a) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. $I(p, q+1) = \int_0^1 x^p (1-x)^{q+1} dx$.

On effectue l'intégration par parties : $u(x) = (1-x)^{q+1}$ $u'(x) = -(q+1)(1-x)^q$
 $v'(x) = x^p$ $v(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$

On a : $I(p, q+1) = \left[\frac{x^{p+1}(1-x)^{q+1}}{p+1} \right]_0^1 + \frac{q+1}{p+1} \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q dx$

Donc $I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q)$.

b) : Par $q=0$. Soit $p \in \mathbb{N}$, $I(p, q) = I(p, 0) = \frac{p!0!}{(p+0)!} I(p+0, 0) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$

• Soit $q \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall p \in \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$.

Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I(p, q+1) &= \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q) = \frac{q+1}{p+1} \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0) \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0) \end{aligned}$$

• Donc, par récurrence :

$\forall q \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$.

$$c) I(p+q, 0) = \int_0^1 x^{p+q} dx = \frac{1}{p+q+1}.$$

(7)

Donc:
$$I(p, q) = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$$

$$\begin{aligned} d) \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} &= \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^k \int_0^1 x^{p+k} dx \\ &= \int_0^1 x^p \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-x)^k dx \\ &= \int_0^1 x^p (1-x)^q dx = I(p, q) \end{aligned}$$

Donc:
$$\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$$

2-a) $f_n(1) = \alpha_n \int_0^1 t^n (1-t)^n dt = \alpha_n I(n, n)$ donc $f_n(1) = 1.$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(1-x) = \alpha_n \int_0^{1-x} t^n (1-t)^n dt.$

On effectue le changement de variable $u = 1-t$. On a: $du = -dt$.

Donc
$$f_n(1-x) = \alpha_n \int_1^x (1-u)^n u^n (-du) = \alpha_n \int_x^1 (1-u)^n u^n du.$$

Ainsi
$$\begin{aligned} f_n(x) + f_n(1-x) &= \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n dt + \alpha_n \int_x^1 t^n (1-t)^n dt \\ &= \alpha_n \int_0^1 t^n (1-t)^n dt = f_n(1). \end{aligned}$$

Donc
$$f_n(x) + f_n(1-x) = 1.$$

c) Pour $x = \frac{1}{2}$, on a: $f_n(\frac{1}{2}) + f_n(\frac{1}{2}) = 1.$

Donc
$$f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Problème 3:

③

Soit (y, z) est solution de (S) si

$$\begin{cases} y'(x) = -2y(x) - z(x) + \cos(x) \\ z'(x) = y(x) - 2z(x) + \sin(x) \end{cases}$$

soit $y'(x) + iz'(x) = (-2y(x) - z(x) + \cos(x)) + i(y(x) - 2z(x) + \sin(x))$

soit $f'(x) = -2(y(x) + iz(x)) + i(y(x) + iz(x)) + \cos(x) + i\sin(x)$

soit $f'(x) = -2f(x) + ie^{ix}$

Donc (y, z) est solution de (S) si $f' + (2-i)f = e^{ix}$.

b) On pose: $f' + (2-i)f = 0$ (E₀).

les solutions de (E₀) sont $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $x \mapsto \lambda e^{-(2-i)x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

• D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de (E₁) de la forme $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ avec λ dérivable.
 $x \mapsto \lambda(x) e^{-(2-i)x}$

$$f' + (2-i)f = e^{ix} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) e^{-(2-i)x} = e^{ix}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = e^{ix}$$

Donc $\lambda: x \mapsto \frac{1}{2} e^{ix}$ convient et $f: x \mapsto \frac{1}{2} e^{ix} \cdot e^{-(2-i)x} = \frac{1}{2} e^{ix} e^{-2x}$ est solution de (E₁).

• Donc les solutions de (E₁) sont:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \lambda e^{-(2-i)x} + \frac{1}{2} e^{ix} e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

c) (y, z) est solution de (S)

soit $\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) + iz(x) = \lambda e^{-(2-i)x} + \frac{1}{2} e^{ix} e^{-2x}$

soit $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) + iz(x) = (\lambda_1 + i\lambda_2) e^{-2x} (\cos x + i\sin x) + \frac{1}{2} (\cos x + i\sin x) e^{-2x}$

soit $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} y(x) = (\lambda_1 \cos x - \lambda_2 \sin x) e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x \\ z(x) = (\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x) e^{-2x} + \frac{1}{2} \sin x \end{cases}$

2-a) i) $x \mapsto -2y(x) - z(x) + \cos(x)$ et $x \mapsto y(x) - 2z(x) + \sin(x)$ sont dérivables, c'est-à-dire y' et z' sont dérivables.

Ainsi

y et z sont deux fois dérivables.

ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} y''(x) &= -2y'(x) - z'(x) - \sin(x) \\ &= -2y'(x) - (y(x) - 2z(x) + \sin(x)) - \sin(x) \\ &= -2y'(x) - y(x) + 2z(x) - 2\sin(x) \end{aligned}$$

$$\text{Or } z(x) = -2y(x) + \cos(x) - y'(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } y''(x) &= -2y'(x) - y(x) - 4y(x) + 2\cos(x) - 2y'(x) - 2\sin(x) \\ &= -4y'(x) - 5y(x) + 2\cos(x) - 2\sin(x). \end{aligned}$$

D'où

$y'' + 4y' + 5y = 2\cos(x) - 2\sin(x).$

iii) On écrit $y'' + 4y' + 5y = 0$. (E₀).

L'équation caractéristique associée est $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = -4$. Ses racines sont $\frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$.

Donc les solutions de (E₀) sont: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^{-2x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

• Comme il n'y a pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de (E₁) de la forme: $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto A \cos x + B \sin x, A, B \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned} \text{On a: } y'' + 4y' + 5y &= 2\cos(x) - 2\sin(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -A \cos x - B \sin x + 4(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) &= 2\cos x - 2\sin x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (-4A + 4B + 2) \cos x = (-4A - 4B + 2) \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4A + 4B + 2 = 0 \\ -4A - 4B + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{car } \cos \text{ et } \sin \text{ non proportionnelles.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A - B = \frac{1}{2} \\ A + B = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Donc $y: x \mapsto \frac{1}{2} \cos x$ est solution de (E_2) .

(10)

Ainsi, les solutions de (E_2) sont :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array}$$

b) • Analyse: Supposons qu'il existe (y, z) solution de (S) .

Alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x.$$

De plus, sur $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z(x) &= -2y(x) + \cos x - y'(x) \\ &= -2(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) e^{-2x} - \cancel{\cos x} + \cos x \\ &\quad - (-\lambda \sin(x) + \mu \cos(x)) e^{-2x} + 2(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) e^{-2x} + \frac{1}{2} \sin x \\ &= (\lambda \sin(x) - \mu \cos(x)) e^{-2x} + \frac{1}{2} \sin(x). \end{aligned}$$

• Synthèse: Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Posez $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x$$

et $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (\lambda \sin(x) - \mu \cos(x)) e^{-2x} + \frac{1}{2} \sin(x)$$

Alors y et z sont différentiables et, sur $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} -2y(x) - z(x) + \cos(x) &= -2(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) e^{-2x} - \cos x - (\lambda \sin(x) - \mu \cos(x)) e^{-2x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin x + \cos(x) \\ &= (-\lambda \sin x + \mu \cos x) e^{-2x} - 2(\lambda \cos x + \mu \sin x) e^{-2x} - \frac{1}{2} \sin x \\ &= y'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } y(x) - 2z(x) + \sin(x) &= (\lambda \cos x + \mu \sin x) e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x - 2(\lambda \sin x - \mu \cos x) e^{-2x} - \frac{1}{2} \sin x \\ &\quad + \sin x \\ &= (\lambda \cos x + \mu \sin x) e^{-2x} - 2(\lambda \sin x - \mu \cos x) e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x \\ &= z'(x) \end{aligned}$$

Donc (y, z) est solution de (S) .

• Conclusion: Les solutions de (S) sont :

$$\begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda \cos x + \mu \sin x) e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x \end{array}, \quad \begin{array}{l} z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda \sin x - \mu \cos x) e^{-2x} + \frac{1}{2} \sin x \end{array}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$