

Exercice 1:

1) • $f(0) = L(0) = 0$ et $f(1) = \lfloor \frac{1}{3} \rfloor = 0$ donc $f(0) = f(1)$ et $0 \neq 1$. Ainsi:

f n'est pas injective.

• Soit $m \in \mathbb{Z}$, $f(3m) = \lfloor \frac{3m}{3} \rfloor = L(m) = m$. Dm:

f est surjective.

2) • Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2)$.

On a: $\begin{cases} 2x_1 = 2x_2 \\ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ -x_1 = -x_2 \end{cases}$ donc $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. Ainsi $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

Dm:

g est injective.

• Supposons g surjective. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x, y) = (1, 0, 1)$

Ainsi $\begin{cases} 2x = 1 \\ x + y = 0 \\ -x = 1 \end{cases}$ donc $x = \frac{1}{2} = -1$ ce qui est absurde.

Dm:

g n'est pas surjective.

Exercice 2:

1) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup \emptyset \end{aligned}$$

Dm:

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

2) • $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset$

donc

$A \Delta A = \emptyset$

• $A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset$

donc

$A \Delta \emptyset = A$

3) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \Delta (A \cap B) &= (A \cup B \cup (A \cap B)) \setminus ((A \cup B) \cap (A \cap B)) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

car $A \cap B \subset A \cup B$

Dm $(A \cup B) \Delta (A \cap B) = A \Delta B$

$$4) (A \cap B) \Delta (\bar{A} \cap B) = ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) \setminus ((A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B))$$

(2)

$$= ((A \cup \bar{A}) \cap B) \setminus (A \bar{A} \cap B)$$

$$= (E \cap B) \setminus (\emptyset \cap B) = B \setminus \emptyset$$

Donc $\boxed{(A \cap B) \Delta (\bar{A} \cap B) = B}$.

Problème 1:

1-a) Supposons $L > 1$. Soit $m \in]1, L[$. Comme $m < L$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq N, \frac{|u_{n+1} - l|}{|u_n - l|} > m$.

Ainsi: $\forall n \geq N, |u_{n+1} - l| > m |u_n - l| > |u_n - l|$ car $m > 1$.

Donc $(|u_n - l|)_{n \geq N}$ est strictement croissante. Ainsi:

$$\forall n \geq N, |u_n - l| > |u_N - l|.$$

Donc, par passage à la limite:

ce qui est absurde. Ainsi: $\boxed{L \leq 1}$.

b) Soit $k \in]L, 1[$. On a $k \in]0, 1[$ et $k > L$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq N, \frac{|u_{n+1} - l|}{|u_n - l|} \leq k$.

$$\text{Soit } n \geq N, \frac{\prod_{j=N}^{n-1} |u_{j+1} - l|}{|u_N - l|} \leq \prod_{j=N}^{n-1} k.$$

Donc, par propriété télescopique: $\frac{|u_n - l|}{|u_N - l|} \leq k^{n-N}$.

$$\text{D'où: } |u_n - l| \leq \frac{k^n}{k^N} |u_N - l|$$

Pose $C = \frac{|u_N - l|}{k^N}$. On a $C \in \mathbb{R}^+$ et:

$$\boxed{\forall n \geq N, |u_n - l| \leq C k^n.}$$

2-a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{3 - \frac{5}{n}}{1 + \frac{5}{n}}$ donc $\boxed{\lim u_n = 3}$

$$\begin{aligned} \text{b) Soit } n \in \mathbb{N}^*, \frac{|u_{n+1} - 3|}{|u_n - 3|} &= \left| \frac{\frac{3(n+1)-5}{n+6} - 3}{\frac{3n-5}{n+5} - 3} \right| = \frac{n+5}{n+6} \cdot \left| \frac{3(n+1)-5-3(n+6)}{3n-5-3(n+5)} \right| \\ &= \frac{n+5}{n+6} \left| \frac{-20}{-20} \right| = \frac{1 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{6}{n}} \end{aligned}$$

Donc $\lim \frac{|u_{n+1} - 3|}{|u_n - 3|} = 1.$

(3)

Ainsi (u_n) converge lentement vers 3

3-a) $u_n = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$

Donc $\lim u_n = \frac{1}{2}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)}{2(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)}$

Donc $u_n - \frac{1}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{2(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1} - \frac{1}{2}}{u_n - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}}{2(\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} + 1)} \cdot \frac{2(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)}{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$
 $= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} + 1} \cdot \frac{-\frac{1}{n+1}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n}}$
 $= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} + 1} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$

Donc $\lim \left| \frac{u_{n+1} - \frac{1}{2}}{u_n - \frac{1}{2}} \right| = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1.$

Ainsi (u_n) converge lentement vers $\frac{1}{2}$.

4-a) On a: $\lim u_{2n} = 0$ et $\lim u_{2n+1} = 0$. Ainsi: $\lim u_n = 0.$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{2n+1} - l}{u_{2n} - l} = \frac{5}{2n+1} \cdot 2n = \frac{5}{1 + \frac{1}{2n}}$ donc $\lim \left| \frac{u_{2n+1} - l}{u_{2n} - l} \right| = 5$

$\frac{u_{2n+2} - l}{u_{2n+1} - l} = \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{2n+1}{5} = \frac{1 + \frac{1}{2n}}{5(1 + \frac{1}{n})}$ donc $\lim \left| \frac{u_{2n+2} - l}{u_{2n+1} - l} \right| = \frac{1}{5}$

Ainsi $\lim \left| \frac{u_{2n+1} - l}{u_{2n} - l} \right| \neq \lim \left| \frac{u_{2n+2} - l}{u_{2n+1} - l} \right|$ donc $\left(\left| \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \right| \right)$ n'a pas de limite.

soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$ et $v_n = e^{\frac{1}{a^n} \ln(1 + a^n)}$ (4)

On $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ car $|a| < 1$.

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a^n)}{a^n} = 1$

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = e.}$

b) $\frac{u_{n+1} - e}{u_n - e} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} - e}{(1 + \frac{1}{n})^n - e} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} - e}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n})^n - e} \cdot \frac{n}{n+1}$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1} - e}{u_n - e} \right| = \left| -\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{e}{2}} \cdot 1 \right| = 1.$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge lentement vers } e.}$

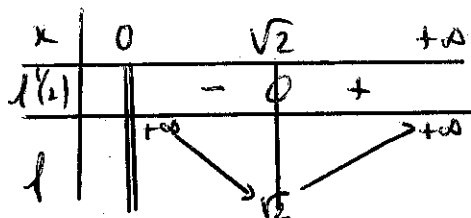
$\frac{v_{n+1} - e}{v_n - e} = \frac{(1 + a^{n+1})^{\frac{1}{a^{n+1}}} - e}{(1 + a^n)^{\frac{1}{a^n}} - e} = \frac{(1 + a^{n+1})^{\frac{1}{a^{n+1}}} - e}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{(1 + a^n)^{\frac{1}{a^n}} - e} \cdot \frac{a^{n+1}}{a^n}$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_{n+1} - e}{v_n - e} \right| = \left| -\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{e}{2}} \cdot a \right| = a \in]0, 1[.$

Ainsi $\boxed{(v_n) \text{ converge géométriquement vers } e.}$

6-a). Posons $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ On a: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
 $x \mapsto \frac{1}{2} (x + \frac{2}{x})$

f est dérivable et: $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{1}{2} (1 - \frac{2}{x^2}) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$



On a: $f([\sqrt{2}, +\infty[) = [\sqrt{2}, +\infty[$ donc $[\sqrt{2}, +\infty[$ est stable par f

Or $u_0 \in [\sqrt{2}, +\infty[$ donc

$\boxed{(u_n) \text{ est bien définie et: } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\sqrt{2}, +\infty[.}$

b) i) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{u_n} - u_n \right)$ (5)

Donc
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$$

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{2}$ donc $2 - u_n^2 < 0$, ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$.

Donc (u_n) est décroissante

c) (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ donc (u_n) converge.

d) Comme f est continue, on a $f(l) = l$ où $l = \lim u_n \in [\sqrt{2}, +\infty[$

Or: $f(l) = l \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(l + \frac{2}{l} \right) = l \Leftrightarrow \frac{1}{l} = \frac{1}{2}l \Leftrightarrow l^2 = 2 \Leftrightarrow l = \pm \sqrt{2}$

Or $-\sqrt{2} \notin [\sqrt{2}, +\infty[$. Donc $l = \sqrt{2}$.

Ainsi
$$\lim u_n = \sqrt{2}$$

e-i) Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} - 2\sqrt{2} \right) \\ &= \frac{1}{2u_n} \left(u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n \right) \\ &= \frac{1}{2u_n} \left(u_n - \sqrt{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(u_n - \sqrt{2} \right) \left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n} \right) \end{aligned}$$

Donc:
$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{2}) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{u_n} \right)$$

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{u_n} \right)$$

Donc $\lim \left| \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} \right| = 0$

Ainsi (u_n) converge rapidement vers 0.

7-a) On pose $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x - \frac{1}{4}(x^2 - 2)$. On a: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ (6)

f est dérivable et: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - \frac{x}{2} = \frac{2-x}{2}$.

x	$-\infty$	1	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f			$\frac{5}{4}\sqrt{2}$		

$f([1, \sqrt{2}]) = [\frac{5}{4}\sqrt{2}] \subset [1, \sqrt{2}]$ donc $[1, \sqrt{2}]$ est stable par f .

On $u_0 \in [1, \sqrt{2}]$ donc: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, \sqrt{2}]$

b) Soit $x \in \mathbb{R}, f(x) - x = -\frac{1}{4}(x^2 - 2)$

Soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -\frac{1}{4}(u_n^2 - 2) \geq 0$ car $u_n \leq 2$

Ainsi (u_n) est croissante.

Comme (u_n) est majorée par $\sqrt{2}$, (u_n) converge vers $l \in [1, \sqrt{2}]$.

Comme f est continue, on a: $f(l) = l$.

Or: $f(l) = l \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(l^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{2}$.

Comme $-\sqrt{2} \notin [1, \sqrt{2}]$, on a: $l = +\sqrt{2}$.

Donc $\lim u_n = \sqrt{2}$.

c) i) Soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} = u_n - \frac{1}{4}(u_n^2 - 2) - \sqrt{2}$

$$= u_n - \sqrt{2} - \frac{1}{4}(u_n - \sqrt{2})(u_n + \sqrt{2})$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - \sqrt{2} = (u_n - \sqrt{2}) \left(1 - \frac{1}{4}(u_n + \sqrt{2}) \right)$$

$$\text{ii) Soit } n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{4}(u_n + \sqrt{2})$$

$$\text{Donc } \lim \left| \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} \right| = 1 - \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \in]0, 1[.$$

Ainsi (u_n) converge géométriquement vers $\sqrt{2}$.

Problème 2:

(7)

$$\begin{aligned}
 1-a) \quad \mathbb{1}_{A \Delta B} &= \mathbb{1}_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)} = \mathbb{1}_{(A \cup B) \cap \overline{A \cap B}} \\
 &= \mathbb{1}_{A \cup B} \cdot \mathbb{1}_{\overline{A \cap B}} = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) (1 - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) \\
 &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A^2 \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B^2 + \mathbb{1}_A^2 \mathbb{1}_B^2 \\
 \text{Or } \mathbb{1}_A^2 &= \mathbb{1}_A \text{ et } \mathbb{1}_B^2 = \mathbb{1}_B \text{ car } \mathbb{1}_A \text{ et } \mathbb{1}_B \text{ ont à valeurs dans } \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

$$\text{Or } \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B : E \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } \boxed{\mathbb{1}_{A \Delta B} \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \pmod{2}}$$

b) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

• Si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ alors $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B + 2 \cdot 0$ (car $\mathbb{1}_A \equiv \mathbb{1}_B \pmod{2}$).

• Si $\mathbb{1}_A \not\equiv \mathbb{1}_B \pmod{2}$, il existe $h : E \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que : $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B + 2h$.

$$\text{Donc } 2h = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$$

Or $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$ est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ et comme $2h$ est à valeurs paires, on a : $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B = 0$. Donc $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

$$\text{Ainsi : } \boxed{\mathbb{1}_A \equiv \mathbb{1}_B \pmod{2} \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B}$$

2-a) Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{1}_{(A \Delta B) \Delta C} &\equiv \mathbb{1}_{A \Delta B} + \mathbb{1}_C \pmod{2} \\
 &\equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C \pmod{2} \\
 &\equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B \Delta C} \pmod{2} \\
 &\equiv \mathbb{1}_{A \Delta (B \Delta C)} \pmod{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathbb{1}_{(A \Delta B) \Delta C} = \mathbb{1}_{A \Delta (B \Delta C)}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)}$$

2) Soit $A, B, C, D \in \mathcal{P}(E)$,

$$\begin{aligned}
 A \Delta B = C \Delta D &\Leftrightarrow 1_{A \Delta B} = 1_{C \Delta D} \\
 &\Leftrightarrow 1_A + 1_B \equiv 1_C + 1_D \quad [2] \\
 &\Leftrightarrow 1_A - 1_C \equiv 1_D - 1_B \quad [2] \\
 &\Leftrightarrow 1_A + 1_C - 21_C \equiv 1_D + 1_B - 21_B \quad [2] \\
 &\Leftrightarrow 1_A + 1_C \equiv 1_D + 1_B \quad [2] \\
 &\Leftrightarrow 1_{A \Delta C} \equiv 1_{B \Delta D} \quad [2] \\
 &\Leftrightarrow 1_{A \Delta C} = 1_{B \Delta D} \\
 &\Leftrightarrow A \Delta C = B \Delta D.
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A \Delta B = C \Delta D \Leftrightarrow A \Delta C = B \Delta D}$

3- Soit $X, Y \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned}
 f_A(X) = Y &\Leftrightarrow A \Delta X = Y \Leftrightarrow 1_{A \Delta X} = 1_Y \\
 &\Leftrightarrow 1_A + 1_X \equiv 1_Y \quad [2] \\
 &\Leftrightarrow 1_X \equiv 1_Y - 1_A \quad [2] \\
 &\Leftrightarrow 1_X \equiv 1_Y + 1_A \quad [2] \\
 &\Leftrightarrow 1_X \equiv 1_{A \Delta Y} \quad [2] \\
 &\Leftrightarrow 1_X = 1_{A \Delta Y} \\
 &\Leftrightarrow X = A \Delta Y
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f_A \text{ est bijective}}$ et $f_A^{-1}: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ est à dire $\boxed{f_A^{-1} = f_A}$
 $Y \mapsto A \Delta Y$

4-a) . Pour $n=1$,

$$\begin{aligned}
 1_{X_1} &= 1_{X_1} = 1_{(X_0 \Delta A) \Delta B} \equiv 1_{X_0 \Delta A} + 1_B \quad [2] \\
 &\equiv 1_{X_0} 1_A + 1_B \quad [2]
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{1_{X_1} \equiv 1_{X_0} 1_A + \left(\sum_{k=0}^{1-1} 1_A^k \right) 1_B \quad [2]}$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $1_{X_n} \equiv 1_{X_0} 1_A + \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1_A^k \right) 1_B \quad [2]$

$$\mathbb{1}_{X_{n+1}} = \mathbb{1}_{(X_n \Delta A) \Delta B} \equiv \mathbb{1}_{X_n} \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \quad [2]$$

$$\equiv \mathbb{1}_{X_0} \mathbb{1}_A^2 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A^{k+1} \right) \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B \quad [2]$$

$$\equiv \mathbb{1}_{X_0} \mathbb{1}_A + \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_A^k \right) \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A^0 \mathbb{1}_B \quad [2]$$

$$\equiv \mathbb{1}_{X_0} \mathbb{1}_A + \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{1}_A^k \right) \mathbb{1}_B \quad [2].$$

• Donc, par récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{1}_{X_n} \equiv \mathbb{1}_{X_0} \mathbb{1}_A + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A^k \right) \mathbb{1}_B \quad [2]$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{1}_{X_n \cap \bar{A}} \equiv \mathbb{1}_{X_0} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\bar{A}} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A^k \right) \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\bar{A}} \quad [2]$$

$$\text{Or } \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\bar{A}} = 0 \quad \text{et } \mathbb{1}_A^k \mathbb{1}_{\bar{A}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \mathbb{1}_{\bar{A}} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \mathbb{1}_{X_n \cap \bar{A}} \equiv \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\bar{A}} \quad [2]$$

$$\equiv \mathbb{1}_{B \cap \bar{A}} \quad [2]$$

$$\text{Donc } \mathbb{1}_{X_n \cap \bar{A}} = \mathbb{1}_{B \cap \bar{A}}$$

D'où:

$$X_n \cap \bar{A} = \bar{A} \cap B.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{1}_{X_n \cap A} \equiv \mathbb{1}_{X_0} \mathbb{1}_A + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A^{k+1} \right) \mathbb{1}_B \quad [2]$$

$$\text{Or, soit } k \in \{0, n-1\}, \quad k+1 \geq 1 \quad \text{donc } \mathbb{1}_A^{k+1} = \mathbb{1}_A.$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{1}_{X_n \cap A} \equiv \mathbb{1}_{X_0} \mathbb{1}_A + n \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \quad [2]$$

$$\bullet \text{ Si } n \text{ pair: } \mathbb{1}_{X_n \cap A} \equiv \mathbb{1}_{X_0 \cap A} \quad [2] \quad \text{donc } X_n \cap A = X_0 \cap A$$

$$\bullet \text{ Si } n \text{ impair: } \mathbb{1}_{X_n \cap A} \equiv \mathbb{1}_{X_0} \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \quad [2]$$

$$\equiv \mathbb{1}_A (\mathbb{1}_{X_0} + \mathbb{1}_B) \quad [2]$$

$$\equiv \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{X_0 \Delta B} \quad [2]$$

$$\equiv \mathbb{1}_{A \cap (X_0 \Delta B)} \quad [2]$$

$$\text{Donc } X_n \cap A = A \cap (X_0 \Delta B)$$

Donc

$$X_n \cap A = \begin{cases} X_0 \cap A & n \text{ pair} \\ A \cap (X_0 \Delta B) & n \text{ impair} \end{cases}$$

(10)

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $X_n = X_n \cap E = X_n \cap (A \cup \bar{A}) = (X_n \cap A) \cup (X_n \cap \bar{A})$

Donc

$$X_n = \begin{cases} (X_0 \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) & n \text{ pair} \\ (A \cap (X_0 \Delta B)) \cup (\bar{A} \cap B) & n \text{ impair} \end{cases}$$