

Exercice 1:

$$1) A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{(A - 3I_3)^3 = 0.}$

2) Posons $B = A - 3I_3$. On a: $A = 3I_3 + B$.

Comme $3I_3$ et B commutent, on a, d'après le binôme de Newton:

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (3I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k$$

Or: $\forall k \geq 3, B^k = 0$. Donc, si $n \geq 2$,

$$A^n = 3^n I_3 + n 3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2$$

ce qui est vrai pour $n=0$ car $A^0 = I_3$ et $n=1$ car $A^1 = A = 3I_3 + B$.

Donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n 3^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc
$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n - n 3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} & n 3^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} & \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} & 3^n - \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} & n 3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ n 3^{n-1} & -n 3^{n-1} & 3^n + n 3^{n-2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2:

(2)

$$1) \frac{\sin(x) - \sin(3x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} - 3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1.$$

$$D'ailleurs: \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(3x)}{x} = -2}$$

$$2) (2-x)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{x-1} \ln(2-x)} = e^{\frac{1}{x-1} \ln(1+1-x)}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+1-x)}{1-x} = 1$$

$$D'ailleurs: \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}}$$

$$3) \text{ Soit } x \in]0, 1[, \text{ comme } -x \in]-1, 0[, L-x = -1. \text{ Donc } \frac{L-x}{x} = -\frac{1}{x}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{L-x}{x} = -\infty.$$

$$\text{Soit } x \in]-1, 0[, \text{ comme } x \in]0, 1[, L-x = 0. \text{ Donc } \frac{L-x}{x} = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{L-x}{x} = 0$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{L-x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{L-x}{x}, \quad \boxed{x \mapsto \frac{L-x}{x} \text{ n'a pas de limite en } 0.}$$

Exercice 3:

• Comme f et g sont continues sur le segment $[a, b]$, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ tels que $\sup_{[a, b]} f = f(c_1)$ et $\sup_{[a, b]} g = g(c_2)$.

• Posons $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) - g(x)$. h est continue sur $[a, b]$ et:

$$h(c_1) = f(c_1) - g(c_1) = \sup_{[a, b]} g - g(c_1) \geq 0$$

$$h(c_2) = f(c_2) - g(c_2) = f(c_2) - \sup_{[a, b]} f \leq 0$$

• Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$h(c) = 0, \text{ c'est-à-dire:}$$

$$\boxed{f(c) = g(c)}.$$

Problème 1:

(3)

1) Posons: $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} = 0$. On a: $\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3, a_{i,k} a_{k,j} = 0 = a_{i,j}$
donc $(a_{i,j})$, c'est-à-dire O_n , est équitable.

• Posons: $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} = 1$. On a: $\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3, a_{i,k} a_{k,j} = 1 = a_{i,j}$
donc $(a_{i,j})$ est équitable.

$$O_n \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ sont équitables.}$$

2) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que A et $-A$ sont équitables.

$$\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3, \quad a_{i,k} a_{k,j} = a_{i,j} \quad \text{et} \quad (-a_{i,k}) \cdot (-a_{k,j}) = -a_{i,j}$$

$$\text{Donc } \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad a_{i,j} = -a_{i,j} \quad \text{Donc } A = O_n.$$

• Réciproquement $A = O_n$ et $-A = O_n$ sont équitables.

Donc la seule matrice A telle que A et $-A$ sont équitables est $A = O_n$.

3) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice équitable.

$$\text{On a: } A^T = (a'_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ avec } \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

$$\text{Soit } i, j, k \in \{1, \dots, n\}, \quad a'_{i,k} a'_{k,j} = a_{k,i} a_{j,k} = a_{j,k} a_{k,i} = a_{j,i} \text{ car } A \text{ équitable} \\ = a'_{i,j}$$

$$\text{Donc } A^T \text{ est équitable.}$$

4) Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_{i,i} = a_{i,j} a_{j,i} = a_{j,i} a_{i,j} = a_{j,j}.$$

$$\text{Donc: } \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad a_{i,i} = a_{j,j}.$$

5) $a_{k,k} \cdot a_{k,k} = a_{k,k}$ donc $a_{k,k} = 0$ ou 1 .

• Supposons qu'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_{k,k} = 0$.

$$\text{Soit } (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad a_{i,j} = a_{i,k} a_{k,j} = a_{i,k} a_{k,k} a_{k,j} = 0$$

Donc $A = 0$ ce qui est absurde.

$$\text{• Ainsi: } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad a_{k,k} = 1.$$

6) Comme A et B ont équilatérales, leurs termes diagonaux valent 1.

Donc les termes diagonaux de $A+B$ valent $2 \neq 1$.

Ainsi:

$$\boxed{A+B \text{ n'est pas équilatérale.}}$$

7) Supposons qu'il existe $(i_0, j_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $a_{i_0 j_0} = 0$.

$$\text{Soit } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = a_{i,i_0} a_{i_0 j_0} a_{j_0 j} = 0$$

Donc $A = 0$ ce qui est absurde.

Ainsi:

$$\boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \neq 0.}$$

8-a) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$a_{i,j} = a_{i,1} a_{1,j}.$$

$$\text{Or } 1 = a_{1,1} = a_{1,j} a_{j,1} \text{ donc } a_{1,j} = \frac{1}{a_{j,1}}.$$

Ainsi

$$\boxed{a_{i,j} = \frac{a_{i,1}}{a_{j,1}}.}$$

$$b) \text{ On a: } C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{1,1}}{a_{j,1}} \\ \frac{a_{2,1}}{a_{j,1}} \\ \vdots \\ \frac{a_{n,1}}{a_{j,1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{j,1}} \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{C_j = \frac{1}{a_{j,1}} C_1.}$$

9-a) Posons $A^2 = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$.

$$\text{Soit } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} = n a_{i,j}.$$

Donc

$$\boxed{A^2 = nA.}$$

b) • Pour $n=1$, $A^k = A = n^{k-1} A$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $A^k = n^{k-1} A$.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = n^{k-1} A^2 = n^{k-1} n A = n^k A.$$

• Donc, par récurrence:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^+, A^k = n^{k-1} A.}$$

c) Supposons A inversible. Comme $A^2 = nA$, on a $A^2 \cdot A^{-1} = nA \cdot A^{-1}$, c'est-à-dire $A = nI_n$. Or les termes diagonaux de nI_n sont $n \neq 1$. (5)

$A = nI_n$. Or les termes diagonaux de nI_n sont $n \neq 1$.

Donc A n'est pas équilatérale ce qui est absurde.

Ainsi A n'est pas inversible.

10. Supposons A symétrique. Alors : $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} = a_{j,i}$.

Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}, 1 = a_{i,i} = a_{i,j} a_{j,i} = a_{i,j}^2$.

Donc $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$.

Supposons : $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} \in \{-1, 1\}$.

Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}, 1 = a_{i,i} = a_{i,j} a_{j,i}$ donc $a_{j,i} = \frac{1}{a_{i,j}} = a_{i,j}$ car $a_{i,j} = \pm 1$.

Donc A est symétrique.

Ainsi A est symétrique et $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} \in \{-1, 1\}$.

11-a)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1/a} & 0 & 1 \\ -1 & b & \frac{1}{a} \\ 0 & -1 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{b} & \frac{2}{a} \\ 0 & -1 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{a} L_1$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & \frac{2}{a} \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{3}{ab}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 1 & 0 \\ \frac{1}{ab} & \frac{1}{b} & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{b} L_2$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{a}{3} & -\frac{ab}{3} \\ \frac{1}{3a} & \frac{1}{3} & -\frac{2b}{3} \\ \frac{1}{3a} & \frac{1}{b} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - \frac{ab}{3} L_3 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{2b}{3} L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3a} & -\frac{1}{3} & -\frac{b}{3} \\ \frac{1}{3ab} & \frac{1}{3b} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{a}{3} & \frac{ab}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow \frac{L_1}{a} \\ L_2 &\leftarrow \frac{L_2}{b} \\ L_3 &\leftarrow \frac{ab}{3} L_3 \end{aligned}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{2}{a} & -1 & -b \\ \frac{1}{ab} & \frac{1}{b} & -2 \\ 1 & a & ab \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{a} & -1 & -2 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -2 \\ 1 & a & ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & b & \frac{1}{a} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3a & 3ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Ainsi $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

12-a) Puisque $a = b = 1$, alors $Q = P$.

Donc Q est inversible et $Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Donc $Q D Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Ainsi $Q D Q^{-1} = U$

13) On a: $A = P D P^{-1} = P Q^{-1} U Q P^{-1} = P Q^{-1} U (P Q^{-1})^{-1}$

Pose $R = P Q^{-1}$. Alors $R \in GL_3(\mathbb{K})$ et

$A = R U R^{-1}$

Problème 2:

(7)

$$1) \quad \boxed{\begin{array}{ll} u_1: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} & \text{et} \quad v_1: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x+1} = \sqrt{x} & x \mapsto \frac{1+x}{2} \end{array}}$$

2-a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \sqrt{u_{n-1}(x)v_{n-1}(x)} \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad v_n(x) - u_n(x) &= \frac{u_{n-1}(x) + v_{n-1}(x)}{2} - \sqrt{u_{n-1}(x)v_{n-1}(x)} \\ &= \frac{u_{n-1}(x) + v_{n-1}(x) - 2\sqrt{u_{n-1}(x)v_{n-1}(x)}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{u_{n-1}(x)} - \sqrt{v_{n-1}(x)})^2}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n(x) \leq v_n(x).}$

b) • Pour $n=1$, $v_1(x) - u_1(x) = \frac{v_1(x) - u_1(x)}{2^{n-1}}$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $v_n(x) - u_n(x) \leq \frac{v_1(x) - u_1(x)}{2^{n-1}}$

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) - u_{n+1}(x) &= \frac{u_n(x) + v_n(x)}{2} - \sqrt{u_n(x)v_n(x)} \\ &\leq \frac{u_n(x) + v_n(x)}{2} - \sqrt{u_n(x)^2} \quad \text{car } u_n(x) \leq v_n(x) \\ &\leq \frac{v_n(x) - u_n(x)}{2} \\ &\leq \frac{v_1(x) - u_1(x)}{2^n}. \end{aligned}$$

• Donc, par récurrence: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n(x) - u_n(x) \leq \frac{v_1(x) - u_1(x)}{2^{n-1}}.}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \sqrt{u_n(x)} (\sqrt{v_n(x)} - \sqrt{u_n(x)}) \geq 0$ donc $(u_n(x))$ est croissante.

• $v_{n+1}(x) - v_n(x) = \frac{u_n(x) - v_n(x)}{2} \leq 0$ donc $(v_n(x))$ est décroissante.

• $0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq \frac{v_1(x) - u_1(x)}{2^{n-1}}.$

Donc, par théorème d'encadrement: $\lim (v_n(x) - u_n(x)) = 0.$

Ainsi

$\boxed{(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } (v_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ se rapprochent.}}$

d) Comme $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite.

(8)

Donc $\boxed{(u_n(x)) \text{ et } (v_n(x)) \text{ convergent vers la même limite.}}$

3-a) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$,

• Comme g est croissante : $\lim_{a^-} g \leq g(a) \leq \lim_{a^+} g$.

• Soit $x \in]a, +\infty[$, comme $x > a$, $\frac{g(x)}{x} \leq \frac{g(a)}{a}$

Donc $g(x) \leq \frac{g(a)}{a} x$. Donc, en faisant tendre x vers a^+ : $\lim_{a^+} g \leq g(a)$.

• Soit $x \in]0, a[$, comme $x < a$, $\frac{g(x)}{x} \geq \frac{g(a)}{a}$.

Donc $g(x) \geq \frac{g(a)}{a} x$. Donc, en faisant tendre x vers a^- : $\lim_{a^-} g \geq g(a)$.

• Ainsi $\lim_{a^-} g = g(a) = \lim_{a^+} g$.

Donc g est continue en a . Ainsi $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}}$

b-i) • Pour $n=0$, $u_n(x) = 1 = u_n(y)$ et $v_n(x) = x \leq y = v_n(y)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n(x) \leq u_n(y)$ et $v_n(x) \leq v_n(y)$.

$$\text{Alors } u_{n+1}(x) = \sqrt{u_n(x)v_n(x)} \leq \sqrt{u_n(y)v_n(y)} = u_{n+1}(y)$$

$$v_{n+1}(x) = \frac{u_n(x) + v_n(x)}{2} \leq \frac{u_n(y) + v_n(y)}{2} = v_{n+1}(y).$$

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \leq u_n(y) \text{ et } v_n(x) \leq v_n(y).}$

ii) Ainsi en faisant tendre n vers $+\infty$, $f(x) \leq f(y)$.

Donc : $\boxed{f \text{ est croissante.}}$

c-i) • Pour $n=1$, soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $u_n(x) = \sqrt{x}$, $x u_n(\frac{1}{x}) = x \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{x} = u_n(x)$

$$\text{et } v_n(x) = \frac{1+x}{2}, \quad x v_n(\frac{1}{x}) = x \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{2} = \frac{x+1}{2} = v_n(x).$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, u_n(x) = x u_n(\frac{1}{x})$ et $v_n(x) = x v_n(\frac{1}{x})$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^{+*}, x u_{n+1}(\frac{1}{x}) = x \sqrt{u_n(\frac{1}{x}) v_n(\frac{1}{x})} = \sqrt{x u_n(\frac{1}{x}) x v_n(\frac{1}{x})} = \sqrt{u_n(x) v_n(x)} = u_{n+1}(x)$$

$$x v_{n+1}(\frac{1}{x}) = x \frac{u_n(\frac{1}{x}) + v_n(\frac{1}{x})}{2} = \frac{u_n(x) + v_n(x)}{2} = v_{n+1}(x)$$

• Donc, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^{+0}, \quad x u_n\left(\frac{1}{x}\right) = u_n(x) \\ \text{et } x v_n\left(\frac{1}{x}\right) = v_n(x).$$

(9)

ii) Soit $x \in \mathbb{R}^{+0}$, $\forall n \in \mathbb{N}^n$, $x u_n\left(\frac{1}{x}\right) = u_n(x)$.

Donc, en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$x f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

d) • f est croissante sur $\mathbb{R}^{+0}$.

• $x \mapsto \frac{f(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+0}$ car f croissante et $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante.

Donc, d'après 3.a),

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+0}.$$

4-a) • Pour $n=1$, soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$$u_{n+1}(x) = u_2(x) = \sqrt{u_1(x)u_1(x)} = \sqrt{x \cdot \frac{1+x}{2}} = \frac{1+x}{2} \sqrt{\frac{2x}{1+x}} = \frac{1+x}{2} u_1\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

$$v_{n+1}(x) = v_2(x) = \frac{u_1(x) + v_1(x)}{2} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1+x}{2}}{2} = \frac{1+x}{2} \frac{\frac{2\sqrt{x}}{1+x} + 1}{2} \\ = \frac{1+x}{2} \frac{v_1\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) + u_1(x)}{2} = \frac{1+x}{2} v_1\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^+$, supposons que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} u_n\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$

$$\text{et } v_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} v_n\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^+, \quad u_{n+2}(x) = \sqrt{u_{n+1}(x)u_{n+1}(x)} = \frac{1+x}{2} \sqrt{u_n\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)u_n\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)} \\ = \frac{1+x}{2} u_{n+1}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

$$v_{n+2}(x) = \frac{u_{n+1}(x) + v_{n+1}(x)}{2} = \frac{1+x}{2} \frac{u_n\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) + v_n\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)}{2} \\ = \frac{1+x}{2} v_{n+1}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

• Donc, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} u_n\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \\ \text{et } v_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} v_n\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

b) Par passage à la limite :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{1+x}{2} f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

c) f est croissante et minorée par 0, donc f admet une limite finie en 0^+ . (10)

Posez $l = \lim_{x \rightarrow 0^+} f$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\sqrt{x}}{2} f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = l$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = l$, d'où $\frac{1}{2}l = l$.

Ainsi $l = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 0$.

Or, en $x=0$, il est clair que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = 0$. Ainsi, par passage à la limite $f(0) = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = f(0)$.

Ainsi f est continue en 0.

5-a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, comme $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n(x) \leq f(x) \leq v_n(x).$$

En particulier, pour $n=1$, $\boxed{\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \geq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$.

Ainsi f n'est pas dérivable en 0.

c) Il est clair que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(1) = 1$ et $v_n(1) = 1$, donc $f(1) = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

Or $\sqrt{x} - 1 \leq f(x) - 1 \leq \frac{x-1}{2}$. Donc:

• si $x > 1$, $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \leq \frac{f(x)-1}{x-1} \leq \frac{x-1}{2(x-1)}$

D'où $\frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{f(x)-1}{x-1} \leq \frac{1}{2}$.

Donc, par théorème d'encadrement: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{2}$.

• si $x < 1$, de même $\frac{1}{\sqrt{x}+1} \geq \frac{f(x)-1}{x-1} \geq \frac{1}{2}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{2}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{2},$

(41)

alors $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{2}.$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } f'(1) = \frac{1}{2}}$