CORRECTION
DS 6

Exercice 1 :

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$,

$$\frac{xf(a) - af(x)}{x-a} = \frac{(x-a)f(a) + a(f(a)-f(x))}{x-a} = f(a) - a\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Or $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a} = f(a) - af'(a).}$$

Exercice 2 :

1) f_n est dérivable et, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{kx^{k-1}}{k!} = -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\underset{j=k-1}{=} -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + e^{-x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^j}{j!} = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$$

Donc $|f_n'(x)| = \frac{e^{-x}x^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$ car $x \in [0,1]$ donc $e^{-x} \leq 1$ et $x^n \leq 1$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in [0,1],\ |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n!}}$

2) f_n est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n!}$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis : $|f_n(1) - f_n(0)| \leq \frac{1}{n!}|1-0|$

Or $f_n(1) = e^{-1}u_n$ et $f_n(0) = 1$ donc $|e^{-1}u_n - 1| \leq \frac{1}{n!}$

Comme $\lim \frac{1}{n!} = 0$, on a : $\lim e^{-1}u_n = 1$.

Ainsi : $\boxed{\lim u_n = e.}$

Exercice 3 :

1) Si $P=0$ alors exp admet une infinité de zéros ce qui est absurde.

Donc : $\boxed{P \neq 0}$

2) • Pour $k=0$, $f^{(k)} = f$ admet une infinité de zéros donc au moins $n+2$ zéros.

• Soit $k \in [\![0, n]\!]$, supposons que $f^{(k)}$ admette au moins $n+2-k$ zéros.

Soient $a_1 < \dots < a_{n+2-k}$ des zéros de $f^{(k)}$.

Soit $j \in [\![1, n+1-k]\!]$, $f^{(k)}$ est continue sur $[a_j, a_{j+1}]$ et dérivable sur $]a_j, a_{j+1}[$. De plus $f^{(k)}(a_j) = 0 = f^{(k)}(a_{j+1})$.

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c_j \in]a_j, a_{j+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(c_j) = 0$.

Comme $c_1 < \dots < c_{n+1-k}$, $f^{(k+1)}$ admet au moins $n+1-k = n+2-(k+1)$ zéros.

• Donc, par récurrence finie, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, n+1]\!],\ f^{(k)} \text{ admet au moins } n+2-k \text{ zéros.}}$

3- Ainsi $f^{(n+1)}$ admet au moins un zéro. Or $\deg P = n$ donc $P^{(n+1)} = 0$.

Ainsi $f^{(n+1)} = -\exp^{(n+1)} = -\exp$. Donc exp admet au moins un zéro ce qui est absurde.

Donc : $\boxed{\text{il n'existe pas de polynôme } P \text{ tel que } f \text{ admette une infinité de zéros.}}$

Exercice 4 :

• Analyse : Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(2X) = 2XP'(X)$.

Si $P \neq 0$, posons $n = \deg P$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

Alors $\sum_{k=0}^{n} a_k 2^k X^k = 2 \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k$.

Donc $2^n a_n = 2n a_n$. Ainsi $2^n = 2n$.

Or, si $n \geq 3$, $2^n > 2n$ (par récurrence) donc $n \leq 2$. Ainsi $\deg P \leq 2$.

• Synthèse : Soit $P = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$P(2X) = 2XP'(X) \iff 4aX^2 + 2bX + c = 4aX^2 + 2bX \iff c = 0$.

• Conclusion : les solutions sont : $\boxed{aX^2 + bX,\ a, b \in \mathbb{R}.}$

Problème 1 :

1-a) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et, soit $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2-1) e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f'''(x) = 2x e^{-\frac{x^2}{2}} - x(x^2-1) e^{-\frac{x^2}{2}} = (-x^3+3x) e^{-\frac{x^2}{2}}$

Donc $\boxed{f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f''(x) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f'''(x) = (-x^3+3x)e^{-\frac{x^2}{2}}}$

b) . Pour $n=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} f^{(n)}(x) = e^{\frac{x^2}{2}} . e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$

Donc $H_0 = 1$ convient.

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} f^{(n)}(x)$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n H_n'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - x(-1)^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} f^{(n+1)}(x) = -H_n'(x) + x H_n(x)$.

Posons $\boxed{H_{n+1} = -H_n' + X H_n}$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} f^{(n+1)}(x) = H_{n+1}(x)$

et $H_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$.

. D'où la conclusion par récurrence.

c) . D'après l'initialisation :

. $H_1 = -H_0' + X H_0$ donc

. $H_2 = -H_1' + X H_1$ donc

. $H_3 = -H_2' + X H_2$ donc

. $H_4 = -H_3' + X H_3$ donc

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 = 1 \\ H_1 = X \\ H_2 = X^2-1 \\ H_3 = X^3-3X \\ H_4 = X^4-6X^2+3 \end{array}}$$

d) . $H_2 = X^2-1$ donc $\boxed{H_2 = (X-1)(X+1)}$

. $H_3 = X^3-3X = X(X^2-3)$ donc $\boxed{H_3 = X(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})}$

. Posons $Q = X^2 - 6X + 3$. On a $H_4 = Q(X^2)$

Le discriminant associé à Q est $\Delta = 24$, ses racines sont $3 \pm \sqrt{6}$

Donc $Q = (X-(3+\sqrt{6}))(X-(3-\sqrt{6}))$

Ainsi $H_4 = Q(X^2) = (X^2-(3+\sqrt{6}))(X^2-(3-\sqrt{6}))$ or $3+\sqrt{6} \geqslant 0$ et $3-\sqrt{6} \geqslant 0$

Donc $\boxed{H_4 = (X-\sqrt{3+\sqrt{6}})(X+\sqrt{3+\sqrt{6}})(X-\sqrt{3-\sqrt{6}})(X+\sqrt{3-\sqrt{6}})}$

2-a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg H_n = n$

- Pour $n=0$, $H_n = 1$ donc $\deg H_n = 0 = n$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\deg H_n = n$.
  - si $n \neq 0$, $\deg H_n' = n-1$ et $\deg XH_n = n+1$ donc $\deg H_n' \neq \deg XH_n$.

    Ainsi $\deg H_{n+1} = n+1$
  - si $n=0$ $\deg H_{n+1} = \deg H_1 = \deg X = 1 = n+1$
- Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \deg H_n = n.}$

b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, c_n le coefficient dominant de H_n.

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 1$.

- Pour $n=0$, $H_n = 1$ donc $c_n = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $c_n = 1$.

  Comme $\deg H_n' < \deg XH_n$, le coefficient dominant de $H_{n+1} = -H_n' + XH_n$ est celui de XH_n, donc $c_{n+1} = 1$.
- Ainsi, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = 1.}$

3-a) Posons $h : x \mapsto x$. On a : $g = h.f$.

Donc, d'après la formule de Leibniz : $g^{(n)} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} h^{(l)} f^{(n-l)}$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h^{(l)}(x) = \begin{cases} x & \text{si } l=0 \\ 1 & \text{si } l=1 \\ 0 & \text{si } l \geqslant 2 \end{cases}$

Donc, soit $x \in \mathbb{R}$, $g^{(n)}(x) = \sum_{l=0}^{1} \binom{n}{l} h^{(l)}(x) f^{(n-l)}(x)$

Ainsi $\boxed{g^{(n)}(x) = xf^{(n)}(x) + n\ f^{(n-1)}(x).}$

b) On a : $f' = -g$ donc $f^{(n+1)} = -g^{(n)}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} f^{(n+1)}(x)$

$= -(-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} g^{(n)}(x)$

$= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(x f^{(n)}(x) + n \; f^{(n-1)}(x)\right)$

$= x H_n(x) - n \; H_{n-1}(x)$

Donc $\boxed{H_{n+1} = X H_n - n H_{n-1}}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n+1} = X H_n - n H_{n-1}$ et d'après 1.b) $H_{n+1} = X H_n - H_n'$

Donc $\boxed{H_n' = n H_{n-1}.}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$,

- si $n = 0$, $H_n'' - X H_n' + n H_n = 0 - X.0 + 0.1 = 0$
- si $n \in \mathbb{N}^*$ $H_n' = n H_{n-1}$ donc $H_n'' = n H_{n-1}'$

Or $H_n = X H_{n-1} - H_{n-1}'$ donc $H_n'' = n X H_{n-1} - n H_n = X H_n' - n H_n$

Dans tous les cas : $\boxed{H_n'' - X H_n' + n H_n = 0.}$

4-a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+2} = X H_{n+1} - (n+1) H_n$ d'après 3.b.

Donc $H_{n+2}(0) = 0. H_{n+1}(0) - (n+1) H_n(0)$

Ainsi $\boxed{H_{n+2}(0) = -(n+1) H_n(0).}$

b)
- Pour $n = 0$, $H_{2n+1}(0) = H_1(0) = 0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $H_{2n+1}(0) = 0$

$H_{2(n+1)+1} = H_{2n+3} = -(2n+2) H_{2n+1}(0) = 0$

- Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; H_{2n+1}(0) = 0.}$

c)
- Pour $n = 0$, $H_{2n}(0) = H_0(0) = 1 = \dfrac{(-1)^n (2n)!}{2^n \, n!}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $H_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

$$H_{2(n+1)}(0) = H_{2n+2}(0) = -(2n+1)H_{2n}(0) = -(2n+1)(-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)(2n+2)(2n)!}{(2n+2)\,2^n n!} = \frac{(-1)^{n+1}(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)n!} = \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

- Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}}$

5-a) - Pour $k=0$, $H_{n-k} = H_n$ admet une racine au moins double par hypothèse.

- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, supposons que H_{n-k} admette une racine au moins double $a \in \mathbb{R}$. On a : $H_{n-k}(a) = 0$ et $H'_{n-k}(a) = 0$.

Or $H'_{n-k} = (n-k)H_{n-k-1}$ donc $H_{n-k-1}(a) = 0$

De plus $H_{n-k} = -H'_{n-k-1} + XH_{n-k-1}$ donc $H'_{n-k-1}(a) = 0$.

Ainsi a est racine au moins double de $H_{n-(k+1)}$

- Donc, par récurrence finie, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ H_{n-k} \text{ admet une racine au moins double.}}$

b) Si H_n admet une racine au moins double alors $H_{n-n} = H_0 = 1$ admet une racine au moins double, ce qui est absurde.

Donc : $\boxed{\text{les racines de } H_n \text{ sont simples.}}$

6-a) - Pour $k=0$, $H_n^{(k)} = H_n = \frac{n!}{(n-k)!} H_{n-k}$.

- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, supposons que $H_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} H_{n-k}$.

$$H_n^{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!} H'_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)H_{n-k-1} = \frac{n!}{(n-(k+1))!} H_{n-(k+1)}$$

- Donc, par récurrence finie : $\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ H_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} H_{n-k}.}$

b) D'après la formule de Taylor, soit $a \in \mathbb{R}$,

$$H_n(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{H_n^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

Donc : $$H_n(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} H_{n-k}(a) X^k.$$

Ainsi $$\boxed{H_n(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{n-k}(a) X^k.}$$

c) Donc, pour $a=0$, $$H_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{n-k}(0) X^k$$
$$\underset{l=n-k}{=} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{n-l} H_l(0) X^{n-l}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(0) X^{n-k}$$
$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} H_k(0) X^{n-k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} H_k(0) X^{n-k}$$

Or, si k impair, $H_k(0) = 0$ d'après 4.b.

Donc $$H_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} H_{2j}(0) X^{n-2j}$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{\cancel{(2j)!}(n-2j)!} \frac{(-1)^j \cancel{(2j)!}}{2^j\, j!} X^{n-2j}$$

D'où : $$\boxed{H_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{n!}{2^j j!(n-2j)!} X^{n-2j}.}$$

Problème 2 : (Extrait de X-ENS / PSI / 2025)

1-a) • g est convexe donc g' est croissante. Or $g' : x \mapsto f'(x) - \alpha x$.

Ainsi $\boxed{x \mapsto f'(x) - \alpha x \text{ est croissante.}}$

• Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $f'(x) - \alpha x \geq f'(0) - \alpha 0$ donc $f'(x) - f'(0) \geq \alpha x$.

Or f' est L-lipschitzienne donc $f'(x) - f'(0) \leq |f'(x) - f'(0)| \leq L|x-0| = Lx$

Ainsi $\alpha x \leq Lx$. Donc : $\boxed{\alpha \leq L}$

2-a) Soit $x \in \mathbb{R}$, comme g est convexe $g(x) \geq g'(0)(x-0) + g(0)$

Donc $f(x) - \frac{1}{2}\alpha x^2 \geq (f'(0) - \alpha . 0)(x-0) + f(0) - \frac{1}{2}\alpha . 0^2$

Ainsi $\boxed{f(x) \geq f'(0)x + f(0) + \alpha \frac{x^2}{2}.}$

b) Comme $\alpha > 0$, $\lim_{x \to \pm\infty} \left(f'(0)x + f(0) + \alpha \frac{x^2}{2} \right) = +\infty$.

Donc, par comparaison, $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty}$.

c) • Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]A, +\infty[$, $f(x) \geq f(0)$

• Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]-\infty, B[$, $f(x) \geq f(0)$

• Comme f est continue sur le segment $[B, A]$, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $c \in [B, A]$ tel que : $\forall x \in [B, A]$, $f(x) \geq f(c)$.

• Posons $x_* = \begin{cases} 0 & \text{si } f(0) \leq f(c) \\ c & \text{sinon.} \end{cases}$

On a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(x_*)}$

d) f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ en x^* et x^* n'est pas une extrémité de $\mathbb{R}$.

Donc : $\boxed{f'(x_*) = 0}$

3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

• Si $x \geq y$. Comme $x \mapsto f'(x) - \alpha x$ est croissante, on a : $f'(x) - \alpha x \geq f'(y) - \alpha y$.

Donc $f'(x) - f'(y) \geq \alpha (x - y)$.

Ainsi $(f'(x) - f'(y))(x - y) \geq \alpha (x - y)^2 = \alpha |x - y|^2$.

• Si $x < y$, en échangeant les rôles de x et y : $(f'(y) - f'(x))(y - x) \geq \alpha |y - x|^2$

Donc $(f'(x) - f'(y))(x - y) \geq \alpha |x - y|^2$.

• Dans tous les cas : $\boxed{(f'(x) - f'(y))(x - y) \geq \alpha |x - y|^2}$.

4-a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x) + \alpha x$

Or g' est croissante et, comme $\alpha > 0$, $x \mapsto \alpha x$ est croissante. Ainsi f' est croissante.

Donc : $\boxed{f \text{ est convexe.}}$

b) Soit $x, y \in \mathbb{R}$

Comme f' est L-lipschitzienne, $|f'(x) - f'(y)| \leq L |x - y|$

Donc $|f'(x) - f'(y)|^2 \leq L |x - y| \, |f'(x) - f'(y)|$

De plus f' est croissante, donc $f'(x) - f'(y)$ est du même signe que $x - y$

Ainsi $(f'(x)-f'(y))(x-y) \geqslant 0$.

Donc : $\boxed{|f'(x)-f'(y)|^2 \leq L\,(x-y)(f'(x)-f'(y))}$

c) $|\tilde{x}-\tilde{y}|^2 = |x-\tau f'(x) - y - \tau f'(y)|^2$

$= ((x-y) - \tau(f'(x)-f'(y)))^2$

$= (x-y)^2 - 2\tau(x-y)(f'(x)-f'(y)) + \tau^2\,(f'(x)-f'(y))^2$

$\leq |x-y|^2 - 2\tau\,(x-y)(f'(x)-f'(y)) + \tau^2 L\,(x-y)(f'(x)-f'(y))$

Donc $\boxed{|\tilde{x}-\tilde{y}| \leq |x-y|^2 - \tau(2-\tau L)\,(x-y)(f'(x)-f'(y))}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$, en appliquant la question précédente à x_n et x_*, on a :

$$|\tilde{x}_n - \tilde{x}_*|^2 \leq |x_n - x_*|^2 - \tau(2-\tau L)\,(x_n - x_*)(f'(x_n) - f'(x_*))$$

Or :
- $\tilde{x}_n = x_n - \tau f'(x_n) = x_{n+1}$
- $\tilde{x}_* = x_* - \tau f'(x_*) = x_*$
- $(x_n - x_*)(f'(x_n) - f'(x_*)) \geqslant 0$ car f' croissante.
- $2 - \tau L \geqslant 0$ car $\tau \leq \frac{2}{L}$
- $\tau > 0$

Donc $|x_{n+1} - x_*|^2 \leq |x_n - x_*|^2$

Ainsi $|x_{n+1} - x_*| \leq |x_n - x_*|$

Donc $\boxed{(|x_n - x_*|) \text{ est décroissante.}}$

5-a) On a : $|\tilde{x}-\tilde{y}|^2 \leq |x-y|^2 - \tau(2-\tau L)\,(x-y)(f'(x)-f'(y))$

$\leq |x-y|^2 - \tau(2-\tau L)\,\alpha\,|x-y|^2$ d'après 3.

Donc $\boxed{|\tilde{x}-\tilde{y}|^2 \leq (1-\alpha\tau(2-\tau L))\,|x-y|^2.}$

b). Posons $K = 1 - \alpha\tau(2 - L\tau)$. Comme $\alpha, \tau > 0$ et $\tau < \frac{2}{L}$ donc $2 - \tau L > 0$,

on a : $K < 1$.

- Comme : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|\tilde{x} - \tilde{y}|^2 \leq |x-y|^2 K$, on a $K \geq 0$.
- Posons $\rho = \sqrt{K}$. On a : $0 \leq \rho < 1$ et : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|\tilde{x} - \tilde{y}| \leq \rho |x - y|$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $|\tilde{x}_n - \tilde{x}_*| \leq \rho |x_n - x_*|$ donc $|x_{n+1} - x_* | \leq \rho |x_n - x_*|$

Ainsi $\boxed{|x_n - x_*| \leq \rho^n |x_0 - x_*|}$

c) Comme $0 \leq \rho < 1$, on a $\lim \rho^n = 0$, donc $\lim |x_n - x_*| = 0$.

Ainsi $\boxed{\lim x_n = x_*}$.