CORRECTION DS 9

Exercice 1 :

1- Choisir une partie de E à p éléments contenant a et b revient à choisir une partie de $E \setminus \{a,b\}$ à $p-2$ éléments, il y en a donc :

$$\boxed{\binom{n-2}{p-2}}$$

2- Soit A (resp. B) l'ensemble des parties de E à p éléments contenant a et pas b (resp. b et pas a). Comme $A \cap B = \emptyset$, on a : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B$.

. Choisir une partie de E à p éléments contenant a et pas b revient à choisir une partie de $E \setminus \{a,b\}$ à $p-1$ éléments, il y en a donc : $\binom{n-2}{p-1}$

Donc $\text{Card}(A) = \binom{n-2}{p-1}$

. De même $\text{Card}(B) = \binom{n-2}{p-1}$

Ainsi, le nombre recherché est $\boxed{2\binom{n-2}{p-1}}$

3- Choisir une partie de E à p éléments ne contenant ni a ni b revient à choisir une partie de $E \setminus \{a,b\}$ à p éléments, il y en a donc : $\boxed{\binom{n-2}{p}}$

4- Les trois ensembles définis dans les questions précédentes sont disjoints et ont pour réunion l'ensemble des parties de E à p éléments qui est de cardinal $\binom{n}{p}$. Donc :

$$\boxed{\binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p} = \binom{n}{p}}$$

Exercice 2 :

1) $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ & 0 \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \\ \vdots & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & -1 \end{vmatrix} \quad \forall i \in [\![2,n]\!],\ C_i \leftarrow C_i - C_1$$

Ainsi, comme la matrice obtenue est triangulaire :

$$\boxed{D_n = (-1)^{n-1}}$$

2) $$d_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & & 1 \\ \vdots & 0 \ddots & \\ n-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ \vdots & 0 \ddots & \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{donc} \quad \boxed{d_n = (n-1)\, D_n}$$

3) Ainsi : $$\boxed{d_n = (n-1)\,(-1)^{n-1}.}$$

Problème 1 :

1) • Le joueur gagne lorsque l'équipe sur laquelle il parie gagne donc $\boxed{Y_k \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})}$

On a : $\boxed{P(Y_k = 0) = P(Y_k = 1) = \frac{1}{2}}$.

• N est la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ donc $\boxed{N \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})}$

On a : $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(N = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}}$

2) • S'il n'y a aucun gagnant : $S = 0$

• Sinon, la mise totale est de n euros donc $S = n$.

Ainsi : $\boxed{S(\Omega) = \{0, n\}}$

• $(S = 0) = \bigcap_{i=1}^{n} (Y_i = 0)$ or $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes.

Ainsi $P(S = 0) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = 0) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$.

De plus $P(S = n) = 1 - P(S = 0) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Donc : $\boxed{P(S = 0) = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad P(S = n) = 1 - \frac{1}{2^n}}$

• $E(S) = 0 . P(S = 0) + n . P(S = n)$ donc $\boxed{E(S) = n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$

3) On a : $E(S) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$. Or $X_1, \dots, X_n$ suivent la même loi donc ont la même espérance. Ainsi : $E(S) = n\, E(X_k)$. Donc $\boxed{E(X_k) = 1 - \frac{1}{2^n}}$

4) Avec $n+1$ joueurs, l'espérance du gain est $1 - \frac{1}{2^{n+1}} > 1 - \frac{1}{2^n}$.

Donc $\boxed{\text{les joueurs ont intérêt à ce qu'il parie avec eux.}}$

5) $(X_k = 0) = (Y_k = 0)$ donc $\boxed{P(X_k = 0) = \frac{1}{2}}$.

6) a) Sachant $(Y_k = 1)$, $N - 1 = \sum_{j \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}} Y_j$, donc de même qu'en 1 ;

$\boxed{\text{sachant } (Y_i = 1), \ N - 1 \text{ suit une loi } \mathcal{B}(n-1, \tfrac{1}{2})}$.

b) $\left(X_k = \frac{n}{i}\right)$ signifie que le joueur k a gagné et qu'il y a i gagnants

donc $\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = (Y_k = 1) \cap (N = i)$

Donc $P(X_\ell = \frac{n}{i}) = P((Y_\ell = 1) \cap (N = i))$

$= P(N = i \mid Y_\ell = 1)\, P(Y_\ell = 1)$

$= P(N-1 = i-1 \mid Y_\ell = 1)\, P(Y_\ell = 1)$

$= \binom{n-1}{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{P(X_\ell = \frac{n}{i}) = \binom{n-1}{i-1} \frac{1}{2^n}}$

7) $X_\ell(\Omega) = \{0\} \cup \{\frac{n}{i},\ i \in [\![1, n]\!]\}$

Donc $E(X_\ell) = 0 \cdot P(X_\ell = 0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} P(X_\ell = \frac{n}{i})$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} \binom{n-1}{i-1} \frac{1}{2^n}$

$= \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{i(i-1)!\,(n-1-(i-1))!} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$

$= \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = \frac{1}{2^n}(2^n - 1) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

D'où : $\boxed{E(X_\ell) = 1 - \frac{1}{2^n}}$.

8) $(X_\ell = n)$ signifie que le joueur ℓ est le seul gagnant donc $(X_\ell = n) \cap (X_j = n) = \emptyset$

Ainsi $P((X_\ell = n) \cap (X_j = n)) = 0$.

Or $P(X_\ell = n) = \binom{n-1}{0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \neq 0$ et $P(X_j = n) = \frac{1}{2^n} \neq 0$.

Donc $P((X_\ell = n) \cap (X_j = n)) \neq P(X_\ell = n) \cdot P(X_j = n)$

Ainsi $\boxed{X_j \text{ et } X_\ell \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

9-a) • Sachant $S = 0$, la mise totale est nulle donc $T = 0$.

Ainsi $\boxed{P_{(S=0)}(T=0) = 1}$

• Sachant $S = n$, n joueurs participent au 2e pari et $T = 0$ signifie qu'ils perdent tous, donc $\boxed{P_{(S=n)}(T=0) = \frac{1}{2^n}}$

b) • $((S=0),(S=n))$ forme un système complet d'évènements. Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T=0) = P_{(S=0)}(T=0)\,P(S=0) + P_{(S=n)}(T=0)\,P(S=n)$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

Donc $\boxed{P(T=0) = \frac{1}{2^n}\left(2-\frac{1}{2^n}\right)}$

• De plus $T(\Omega)=\{0,n\}$ donc $P(T=n) = 1 - P(T=0) = 1 - \frac{2}{2^n} + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2$

D'où $\boxed{P(T=n) = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2}$

c) • $E(T) = 0 \cdot P(T=0) + n\,P(T=n)$ donc $\boxed{E(T) = n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2}$

• $E(T^2) = 0^2 \cdot P(T=0) + n^2 P(T=n) = n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2$

et $V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2 - n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^4$

Donc $$V(T) = n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2\left(1-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2\right)$$
$$= n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2\left(\frac{2}{2^n}-\frac{1}{(2^n)^2}\right)$$

Donc $\boxed{V(T) = \frac{n^2}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2\left(2-\frac{1}{2^n}\right)}$

d) $\operatorname{cov}(ST) = E(ST) - E(S)E(T)$

Or $E(ST) = 0 \cdot 0\,P((S=0)\cap(T=0)) + 0 \cdot n\,P((S=0)\cap(T=n)) + n \cdot 0\,P((S=n)\cap(T=0))$
$+ n \cdot n\,P((S=n)\cap(T=n))$
$= n^2 P((S=n)\cap(T=n))$
$= n^2 P(T=n)$ car si $T=n$, alors $S=n$.
$= n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2$

Donc $$\operatorname{cov}(S,T) = n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2 - n\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \cdot n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2$$
$$= n^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2\left(1-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right)$$

D'où : $\boxed{\operatorname{cov}(S,T) = \frac{n^2}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2}$

10) On a $E(T) = \sum_{\ell=1}^{n} E(Z_\ell)$. Or $Z_1, \dots, Z_n$ suivent la même loi donc :

$E(T) = n\,E(Z_\ell)$. Ainsi $E(Z_\ell) = \frac{1}{n} E(T)$.

Donc $\boxed{E(Z_\ell) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2}$

11) Comme $1 - \frac{1}{2^n} < 1$, $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 < 1 - \frac{1}{2^n}$ donc $E(Z_\ell) < E(X_\ell)$

Ainsi **le joueur k n'a pas intérêt à parier sur le 2e match.**

12-a) S'il n'y a pas de gagnant, $U=0$ et sinon $U = N$ or $N(\Omega) = [\![0, n]\!]$

donc $\boxed{U(\Omega) = [\![0, n]\!]}$.

b) Sachant $(N = i)$, i joueurs ont joué au 2e pari, donc $U=0$ si personne ne gagne ou $U = i$ sinon.

Ainsi, si $j \neq i$, $P_{(N=i)}(U=j) = 0$.

De plus, si $i = j$, sachant $(N=i)$, $(U=i)$ signifie qu'au moins un joueur a gagné donc $P_{(N=i)}(U=i) = 1 - \frac{1}{2^i}$

Ainsi : $\boxed{P_{(N=i)}(U=j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 - \frac{1}{2^i} & \text{si } i = j \end{cases}}$

c) • $E(U) = \sum_{j=0}^{n} j\,P(U=j) = \sum_{j=1}^{n} j\,P(U=j)$

• Or $(N=i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.

Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(U=j) = \sum_{i=0}^{n} P_{(N=i)}(U=j)\,P(N=i)$$

$$= P_{(N=0)}(U=j)\,P(N=0) + P_{(N=j)}(U=j)\,P(N=j)$$

Or $N \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ donc :

$$P(U=j) = P_{(N=0)}(U=j)\binom{n}{0}\frac{1}{2^n} + P_{(N=j)}(U=j)\binom{n}{j}\frac{1}{2^n}$$

De plus, sachant $(N=0)$, on a $(U=0)$ donc, si $j \neq 0$, $P_{(N=0)}(U=j)=0$

Ainsi, si $j \neq 0$, $P(U=j) = \left(1-\frac{1}{2^j}\right)\binom{n}{j}\cdot\frac{1}{2^n}$.

. Comme $\sum_{j=0}^{n} P(U=j) = 1$,

on a : $P(U=0) = 1 - \sum_{j=1}^{n} P(U=j)$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(1-\frac{1}{2^j}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j} - \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\cdot\frac{1}{2^j}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}\left(2^n - \cancel{1} - \left(\left(1+\frac{1}{2}\right)^n - \cancel{1}\right)\right)$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Donc : $\boxed{U(\Omega) = [\![0,n]\!], \quad P(U=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{et } \forall j \in [\![1,n]\!],\ P(U=j) = \left(1-\frac{1}{2^j}\right)\binom{n}{j}\frac{1}{2^n}}$

. Donc $E(U) = \sum_{j=1}^{n} j\left(1-\frac{1}{2^j}\right)\binom{n}{j}\frac{1}{2^n}$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{n} j\,\frac{n!}{j!(n-j)!}\left(1-\frac{1}{2^j}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}\frac{n\,(n-1)!}{(j-1)!\,(n-1-(j-1))!}\left(1-\frac{1}{2^j}\right)$$

$$= \frac{n}{2^n}\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}\left(1-\frac{1}{2^j}\right) = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$= \frac{n}{2^n}\left(2^{n-1} - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right)$$

D'où : $\boxed{E(U) = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)}$

13) De même qu'en 10, $E(W_\ell) = \frac{E(U)}{n}$. Donc $\boxed{E(W_\ell) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)}$

14) $E(X_\ell) - E(W_\ell) = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} > 0$

car $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^n}$. Donc $E(X_\ell) > E(W_\ell)$.

Ainsi $\boxed{\text{le joueur } \ell \text{ n'a pas intérêt à passer sur le 2}^{e}\text{ match}}$

Problème 2 :

1) • On a $C = -I_2$ donc $CD = -D = DC$ ainsi $\boxed{CD = DC}$

• $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 1 - 1 = -3$

$$AD - BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

donc $\det(AD - BC) = 3 - 6 = -3$.

Ainsi $\boxed{\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)}$

2-a) • $\det\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad\quad 0} & \\ \ddots \; 1 & \\ 0 & D \end{vmatrix}}_{2n} = \underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad\quad 0} & \\ \ddots \; 1 & \\ 0 & D \end{vmatrix}}_{2n-1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \ddots & 0 \\ 1 & \\ 0 & D \end{vmatrix}}_{2n-1}$

et en réitérant les développements par rapport à la $1^{ère}$ ligne :

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix} = \det(D)}$$

• $\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux égaux à 1.

Donc : $\boxed{\det\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = 1}$

• $\det\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ & 1 \; \ddots \\ \boxed{0 \quad\quad 1} & \end{vmatrix}$

En effectuant n développements par rapport à la dernière ligne :

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \det(A)}$$

b) $\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$

Donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$

Ainsi : $\boxed{\det\begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix} = \det D \cdot \det A}$

c) D'après 2.b) $\det\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ O_m & D^T \end{pmatrix} = \det(A^T).\det(D^T) = \det(A).\det(D)$

Or : $\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ O_m & D^T \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A & O_m \\ C & D \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\det\begin{pmatrix} A & O_m \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A).\det(D)}$

3-a) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_m \\ -C & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ CD-DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ O_m & D \end{pmatrix}$ car $CD = DC$

Donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.\det\begin{pmatrix} D & O_m \\ -C & I_m \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} AD-BC & B \\ O_m & D \end{pmatrix}$

Ainsi, d'après 2 b et c : $\det(M).\det(D) = \det(AD-BC).\det(D)$.

Or D inversible donc $\det(D) \neq 0$, d'où : $\boxed{\det(M) = \det(AD-BC)}$.

b). Posons $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \det(D - xI_n)$ f est une fonction polynômiale de degré n

(somme et produits de n termes de la forme $d_{i,j}$ ou $d_{i,j} - x$) donc f s'annule

au plus n fois. Posons $S = \{x \in \mathbb{C}, f(x) = 0\}$ alors S est un ensemble fini.

- Soit $x \in \mathbb{C} \setminus S$, alors $f(x) \neq 0$, donc D_x est inversible

donc, d'après 3.a, $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$.

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{C} \setminus S,\ \det(M_x) = \det(AD_x - BC)}$

c) Comme S est fini, il existe un voisinage V de 0 tel que :

$$\forall x \in V \setminus \{0\},\quad \det(M_x) = \det(AD_x - BC).$$

Comme $x \mapsto \det(M_x)$ et $\det(AD_x - BC)$ sont polynômiales, elles sont continues,

donc, en faisant tendre x vers 0 : $\det(M_0) = \det(AD_0 - BC)$.

Ainsi : $\boxed{\det(M) = \det(AD-BC)}$.

4- • $R_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $R_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$

$R_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$, $R_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

Donc : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(R_A) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}}$

- $\mathcal{L}_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{L}_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{L}_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, $\mathcal{L}_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$

Donc :
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}_A) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}}$$

5) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A) = \begin{pmatrix} a-qa & -qc & b & 0 \\ -qb & a-qd & 0 & b \\ c & 0 & d-qa & -qc \\ 0 & c & -qb & d-qd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI_2 - q\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Donc :
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A) = \begin{pmatrix} aI_2 - qA^T & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - qA^T \end{pmatrix}}$$

6-a) • $cI_2 . (dI_2 - qA^T) = (dI_2 - qA^T) . cI_2$ donc d'après 3.b.ii,

$$\det(M_A) = \det\left((aI_2 - qA^T)(dI_2 - qA^T) - bcI_2\right)$$
$$= \det\left(adI_2 - aqA^T - qdA^T + q^2A^T - bcI_2\right)$$
$$= \det\left((ad-bc)I_2 - q(a+d)A^T + q^2 A^{2T}\right)$$
$$= \det\left((ad-bc)I_2 - q(a+d)A + q^2A^2\right)$$

Or : $A.\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$

Donc $\det(M_A) = \det\left(A\tilde{A} - q(a+d)A + q^2A^2\right)$
$$= \det\left(A\left(\tilde{A} - q(a+d)I_2 + q^2A\right)\right)$$

Ainsi $\boxed{\det(M_A) = \det(A) . \det\left(\tilde{A} - q(a+d)I_2 + q^2A\right)}$

b) • $\tilde{A} - q(a+d)I_2 + q^2A = \begin{pmatrix} d - q(a+d) + q^2a & -b + q^2b \\ -c + q^2c & a - q(a+d) + q^2d \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (1-q)(d-qa) & -(1-q)(1+q)b \\ -(1-q)(1+q)c & (1-q)(a-qd) \end{pmatrix}$$

$$= (1-q)\begin{pmatrix} d-qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a-qd \end{pmatrix}$$

- Donc : $\boxed{\det(M_A) = (1-q)^2 \det(A) \det\begin{pmatrix} d-qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a-qd \end{pmatrix}}$

c) $\det\begin{pmatrix} d-qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a-qd \end{pmatrix} = (d-qa)(a-qd) - (1+q)^2 bc$

$$= ad - q(a^2+d^2) + q^2 ad - (1+q)^2 bc$$

$$= ad\left((1+q)^2 - 2q\right) - q(a^2+d^2) - (1+q)^2 bc$$

$$= (1+q)^2(ad-bc) - q(a^2+d^2+2ad)$$

$$= (1+q)^2 \det(A) - q(a+d)^2$$

Donc : $\boxed{\det(M_A) = (1-q)^2 \det(A)\left((1+q)^2\det(A) - q(a+d)^2\right)}$

7-a) Soit $x \in \mathbb{C}$, $P_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc$

Donc P_A est un polynôme unitaire du second degré.

Ainsi, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{C},\ P_A(x) = (x-\alpha)(x-\beta).}$

b). On a : $\forall x \in \mathbb{C},\ P_A(x) = (x-\alpha)(x-\beta) = (x-a)(x-d) - bc$

Donc : $\forall x \in \mathbb{C},\quad x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = x^2 - (a+d)x + ad - bc.$

Donc $\alpha + \beta = a + d$ et $\alpha\beta = ad - bc = \det(A)$.

- $P_A(q\alpha) P_A(q\beta) = (q\alpha - \alpha)(q\alpha - \beta)(q\beta - \alpha)(q\beta - \beta)$

$$= (1-q)^2 \alpha\beta (q\alpha - \beta)(q\beta - \alpha)$$

$$= (1-q)^2 \det(A)\left(q^2\alpha\beta - q(\beta^2 + \alpha^2) + \alpha\beta\right)$$

$$= (1-q)^2 \det(A)\left(q^2\det(A) - q\left((\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\right) + \alpha\beta\right)$$

$$= (1-q)^2 \det(A)\left(q^2\det(A) - q(a+d)^2 + \alpha\beta(1+2q)\right)$$

$$= (1-q)^2 \det(A)\left((q^2+1+2q)\det(A) - q(a+d)^2\right)$$

$$= (1-q)^2 \det(A)\left((1+q)^2\det(A) - q(a+d)^2\right)$$

Donc : $\boxed{P_A(q\alpha) P_A(q\beta) = \det(M_A)}$

c) • Supposons qu'il existe une matrice B non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $AB=qBA$ (12)

Alors $(\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A)(B) = AB - qBA = 0$ et $B \neq 0$

Donc $\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A \notin GL(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ ainsi $M_A \notin GL_4(\mathbb{C})$ donc $\det(M_A) = 0$.

Ainsi $P_A(q\alpha)P_A(q\beta) = 0$.

Or P_A a deux racines α et β. Ainsi :

$(q\alpha = \alpha$ ou $q\alpha = \beta)$ et $(q\beta = \alpha$ ou $q\beta = \beta)$.

• si $q\alpha = \alpha$, comme $q \neq 1$, $\alpha = 0$ donc $P_A(0) = 0$, ainsi $\det(A) = 0$

• si $q\beta = \beta$, de même $\det(A) = 0$.

Donc : $\det(A) = 0$ ou $q\alpha = \beta$ ou $q\beta = \alpha$.

• Supposons $\det(A) = 0$. Alors $\det(M_A) = 0$ donc $M_A \notin GL_4(\mathbb{C})$

ainsi $\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A \notin GL(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ donc il existe $B \in \ker(\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A) \setminus \{0\}$

On a donc $B \neq 0$ et $(\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A)(B) = 0$ donc $AB = qBA$.

• Supposons $\alpha = q\beta$, alors $P_A(q\beta) = P_A(\alpha) = 0$ donc $\det(M_A) = 0$.

et de même, il existe $B \neq 0$ tel que $AB = qBA$

• De même dans le cas $\beta = q\alpha$.

Ainsi : $\boxed{\text{l'équivalence est prouvée.}}$