PCSI 1 — 2025/2026

Devoir à la maison n° 10 :

A rendre pour le : lundi 4 mai

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

Si E est un ensemble et k un entier naturel non nul, une partition de E est un ensemble $\{A_1,\dots,A_k\}$ de parties de E non vides, deux à deux disjointes, et dont la réunion est égale à E :

$$\forall i \in [\![1,k]\!],\ A_i \neq \emptyset, \quad \forall i,j \in [\![1,k]\!],\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i = E.$$

Par exemple $\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}$ est une partition de $E = [\![1,5]\!]$ en trois parties. On notera en particulier que l'ordre dans lequel interviennent les parties $A_1,\dots,A_k$ n'a pas d'incidence sur la définition de la partition.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$, on note $S_{n,k}$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties. On pose également, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{0,0} = 1$ et $S_{n,0} = 0$.

Les nombres $S_{n,k}$ sont appelées nombres de Stirling de deuxième espèce.

1. (a) Déterminer la valeur de $S_{3,2}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que valent $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$?
2. Soit n un entier, $n \geq 2$, soit $k \in [\![1,n-1]\!]$ et soit $E = \{x_1,\dots,x_n\}$ un ensemble à n éléments. On souhaite établir une relation entre $S_{n,k}$, $S_{n-1,k-1}$ et $S_{n-1,k}$.
   (a) Dans cette question, on étudie l'exemple $E = \{1,2,3,4\}$ ($n = 4$) et $k = 2$.
      i. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$.
      ii. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une contient 4 tout en étant différente du singleton $\{4\}$.
      iii. Vérifier, pour l'exemple traité, la relation :
      $$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}.$$
   (b) On revient au cas général.
      i. Quel est le nombre de partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
      ii. Quel est le nombre de partitions de E en k parties, dont l'une contient x_n tout en étant différente du singleton $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
      iii. En déduire que :
      $$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}.$$

Problème 2 :

On considère une élection dans laquelle se présentent uniquement deux candidats notés A et B.
Les bulletins sont dépouillés un par un.
On suppose que A est élu avec m voix contre n pour B ($m+n$ suffrages exprimés avec $m > n$). Un dépouillement peut être représenté par un mot de l'alphabet $\{A,B\}$ correspondant à l'ordre dans lequel sont dépouillés les bulletins. Par exemple, si A est élu avec 2 voix contre 1 voix pour B, nous avons 3 dépouillements possibles représentés par les mots suivants :

AAB
ABA
BAA

On note $\mathcal{P}$ la propriété : "le nombre de voix obtenues par A est strictement supérieur au nombre de voix obtenues par B pendant tout le dépouillement".

1. Dans cette question, on suppose qu'il y a eu 5 suffrages exprimés avec 3 voix pour A et 2 pour B.
   (a) Déterminer le nombre de dépouillements possibles.
   (b) Ecrire les dépouillements vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.
2. On revient au cas général.
   (a) Justifier que le nombre de dépouillements possibles est égal à $\binom{m+n}{m}$.
   (b) Déterminer le nombre de dépouillements commençant par un bulletin pour le candidat B.
   (c) En déduire que le nombre de dépouillements vérifiant $\mathcal{P}$ est inférieur ou égal à $\binom{m+n-1}{m-1}$.