PCSI 1

Devoir à la maison n° 12 :

2025/2026

A rendre pour le : lundi 1er juin

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :
Soit $n \geq 2$.
Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule porte le numéro k, on place dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
2. Soient $k, j \in [\![1, n]\!]$. Calculer $P_{(X=k)}(Y = j)$.
3. (a) Déterminer la décomposition en éléments simples de :
$$\frac{1}{X(X+1)}.$$
   (b) En déduire la loi de Y.
4. Calculer l'espérance de Y.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
6. (a) Montrer que : $E(XY) = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$.
   (b) En déduire la covariance de X et Y.

Problème 2 :
Soient p et n deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$.
On rappelle la notation :
$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

1. **Déterminant d_p.**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on note $A_p = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n-p+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} = \begin{pmatrix} p+i+j-2 \\ p+i-1 \end{pmatrix}$ avec $(i,j) \in \left[\!\left[1, n-p+1\right]\!\right] \times \left[\!\left[1, n-p+1\right]\!\right]$. On note $d_p = \det(A_p)$.
   (a) Expliciter les entiers r et s tels que $a_{i,j} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ pour les quatre coefficients $a_{1,1}$, $a_{1,n-p+1}$, $a_{n-p+1,1}$ et $a_{n-p+1,n-p+1}$.
   (b) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, calculer les déterminants d_n, d_{n-1} et d_{n-2}.
   (c) On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes. On note L_i la ligne d'indice i.
      i. Dans le calcul de d_p on effectue les opérations suivantes : pour i variant de 2 à $n-p+1$, on retranche la ligne L_{i-1} à la ligne L_i (opération codée : $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$). Déterminer le coefficient d'indice (i,j) de la nouvelle ligne L_i.
      ii. En déduire une relation entre d_p et d_{p+1}, puis en déduire d_p.
2. **Déterminants D_n et Δ_n**
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le déterminant de la matrice carrée $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $(i+j)!$, **les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à n.**
On note $D_n = \det((i+j)!)$. Avec les mêmes notations, on note $\Delta_n = \det\left(\begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix}\right)$ pour $(i,j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, n]\!]$.
   (a) Calculer les déterminants D_0, D_1, D_2, Δ_0, Δ_1 et Δ_2.
   (b) Donner une relation entre D_n et Δ_n.
   (c) En déduire Δ_n puis D_n.